

Politechnika Wrocławska  
Instytut Fizyki Teoretycznej

MATERIAŁY DO WYKŁADU

# Wstęp do optyki kwantowej

Paweł Machnikowski

Pierwotną wersję skryptu opracowano w ramach programu  
ZPR PWr – Zintegrowany Program Rozwoju Politechniki Wrocławskiej



Unia Europejska  
Europejski Fundusz Społeczny



Wrocław 2020–2024



# Spis treści

<b>Wstęp</b> . . . . .	1
Cel i zakres skryptu . . . . .	1
Zakładana wiedza wstępna . . . . .	1
<b>Rozdział 1. Wprowadzenie: o czym jest optyka kwantowa</b> . . . . .	3
1.1. Fotony: trochę historii . . . . .	3
1.2. „Detekcja pojedynczych fotonów” . . . . .	6
1.3. O czym jest optyka kwantowa . . . . .	8
1.4. Statystyka zdarzeń niezależnych . . . . .	9
<b>Rozdział 2. Optyka klasyczna</b> . . . . .	13
2.1. Światło jako fala elektromagnetyczna . . . . .	13
2.2. Interferometry i koherencja . . . . .	16
2.2.1. Koherencja podłużna i poprzeczna . . . . .	16
2.2.2. Dzielnik wiązki . . . . .	18
2.2.3. Interferencja i funkcja korelacji 1. rzędu . . . . .	19
<b>Rozdział 3. Przejścia promieniste, współczynniki Einsteina, lasery</b> . . . . .	23
3.1. Współczynniki Einsteina . . . . .	23
3.2. Szybkości przejść i reguły wyboru . . . . .	25
3.3. Lasery . . . . .	27
3.3.1. Fizyczne podstawy emisji laserowej . . . . .	27
3.3.2. Tryby pracy lasera . . . . .	32
3.4. Poszerzenie linii widmowych . . . . .	36
<b>Rozdział 4. Statystyka detekcji fotonów</b> . . . . .	41
4.1. Statystyka liczby fotonów . . . . .	41
4.2. Statystyka fotonów a statystyka zliczeń . . . . .	43
4.3. Szum śrutowy fotodiody . . . . .	45
4.4. Doświadczalna obserwacja statystyk nieklasycznych . . . . .	49
<b>Rozdział 5. Interferometria natężeniowa i korelacje fotonowe</b> . . . . .	53
5.1. Natężeniowa interferometria gwiazdowa . . . . .	54
5.2. Funkcja korelacji 2. rzędu — opis klasyczny . . . . .	57
5.3. Funkcja korelacji 2. rzędu — opis kwantowy . . . . .	59
5.4. Antygrupowanie fotonów i źródła pojedynczych fotonów: eksperymenty . . . . .	62
<b>Rozdział 6. Stany koherentne i ścięśnione</b> . . . . .	69
6.1. Kwantowy opis pola . . . . .	69
6.2. Stany koherentne . . . . .	72
6.3. Stany ścięśnione . . . . .	74
6.3.1. Ścięśnianie kwadraturowe . . . . .	75
6.3.2. Detekcja stanów ścięśnionych kwadraturowo . . . . .	76
6.3.3. Wytwarzanie stanów ścięśnionych kwadraturowo . . . . .	77
6.3.4. Stany ścięśnione – realizacja eksperymentalna . . . . .	80
6.3.5. Stany ścięśnione amplitudowo i fazowo . . . . .	81

<b>Rozdział 7. Kwantowa granica rozdzielczości interferometrii</b> . . . . .	83
7.1. Prosty pomiar interferometryczny . . . . .	83
7.2. Standardowa granica kwantowa w interferometrii . . . . .	85
7.3. Interferometria na stanach ścięśnionych . . . . .	87
<b>Rozdział 8. Stany własne liczby fotonów</b> . . . . .	89
8.1. Operatory kreacji i anihilacji . . . . .	89
8.2. Stany koherentne raz jeszcze . . . . .	92
8.3. Kwantowa teoria eksperymentu HB&T i eksperyment HOM . . . . .	93
<b>Spis wykorzystanej literatury</b> . . . . .	97
<b>Spis rysunków</b> . . . . .	99
<b>Spis tabel</b> . . . . .	103







## Wstęp



### Cel i zakres skryptu

Skrypt jest pomocą do wykładu *Wstęp do optyki kwantowej* na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej.

W zamyśle autora prezentacja „fenomenologiczna” (nieco jedynie wzmocniona podstawami rachunku prawdopodobieństwa) ma umożliwić studentom zrozumienie istoty omawianych zjawisk, a także nabycie właściwej intuicji oraz umiejętności przewidywania zjawisk bez konieczności wykonywania rachunków, w myśl niezwykle trafnego stwierdzenia Richarda Feynmana: *Nigdy nie siadaj do rachunków, dopóki nie znasz rozwiązania*. Takie podejście umożliwia też przyswojenie podstawowych pojęć studentom, którzy nie wykazują szczególnego zacięcia teoretycznego lub nie mają solidnego przygotowania formalnego. Wiele partii materiału z tej części inspirowanych jest znakomitym podręcznikiem Marka Foxa *Quantum Optics: An Introduction* (Oxford 2006). Część rozszerzeń odpowiada treściom zawartym w podręczniku R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*.



### Zakładana wiedza wstępna

Zakłada się, że student zna mechanikę kwantową na poziomie przynajmniej semestralnego wykładu, a także podstawy rachunku prawdopodobieństwa, a w przynajmniej pojęcia rozkładu prawdopodobieństwa oraz prawdopodobieństwa warunkowego. Godnymi polecenia podręcznikami mechaniki kwantowej są L. Marchildon, *Quantum Mechanics* oraz C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, t. 1,2. Z podstawami rachunku prawdopodobieństwa można się zapoznać w podręcznikach matematyki dla inżynierów, np. D. A. McQuarrie, *Matematyka dla przyrodników i inżynierów*, tom 3, a także (w znacznie szerszym zakresie) w standardowych podręcznikach rachunku prawdopodobieństwa, np. W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. Poszczególne zagadnienia omówione są również (mniej lub bardziej sensownie) na stronach Wikipedii, z tym że poleca się raczej wersję angielską.



## Wprowadzenie: o czym jest optyka kwantowa

W tym rozdziale przypomnimy sobie w zarysie wczesne etapy historycznego rozwoju teorii kwantowej, które doprowadziły do aktualnego rozumienia światła jako strumienia cząstek – fotonów<sup>1</sup>, oraz przeanalizujemy krytycznie współczesny eksperyment „detekcji pojedynczych fotonów”. Następnie scharakteryzujemy zakres zagadnień, jakimi zajmuje się optyka kwantowa. W ostatnim podrozdziale zajmiemy się formalnym, matematycznym opisem statystyki niezależnych zdarzeń, zachodzących w losowych chwilach czasu, co będzie nam potrzebne w dalszym toku wykładu.

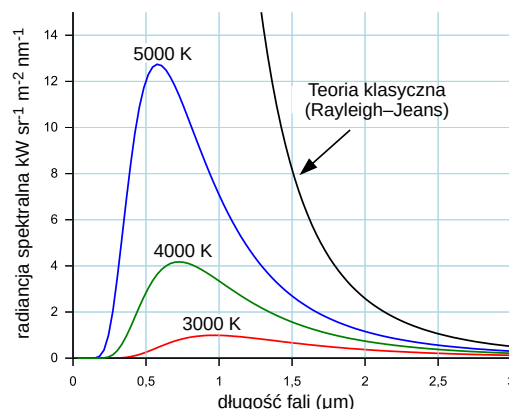
## 1.1.

## Fotony: trochę historii

Już Isaac Newton wierzył, że światło jest strumieniem cząstek. Mierząc się z obserwowanymi zjawiskami rozszczepienia światła, załamania, dyfrakcji i polaryzacji, stworzył teoretyczny opis (opublikowany w 1704 roku), który jednak ostatecznie nie był w stanie w pełni wyjaśnić tych zjawisk i dziś ma znaczenie wyłącznie historyczne. W wieku 18. stopniowo coraz większe uznanie zdobywał pogląd o falowej naturze światła, który w szczególności poprawnie i w naturalny sposób opisywał zjawisko dyfrakcji. Rozwój teorii Maxwella opisującej pole elektromagnetyczne stworzył formalne podwaliny falowej natury światła (Maxwell wykazał, że światło jest falą elektromagnetyczną, w roku 1862). Od tego czasu teoria falowa uznawana była za „poprawną”.

Pierwsza obserwacja, która podważyła klasyczne, falowe rozumienie światła, dotyczyła *promieniowania równowagowego*, czyli promieniowania, które w wyniku wielokrotnej absorpcji i emisji jest w równowadze z materią o ustalonej temperaturze. Do rozważań teoretycznych wygodnym modelem jest pudło (rezonator) z promieniowaniem, jeśli wewnętrzne ścianki pudła całkowicie pochłaniają energię. Ten sam opis teoretyczny stosuje się jednak do każdego innego obiektu, który absorbuje całe padające promieniowanie (*ciała doskonale czarne*) i emituje promieniowanie będące w równowadze z materią, np. do gwiazd.

W roku 1900 John William Strutt, trzeci baron Rayleigh (zwany powszechnie Lordem Rayleighem) wykazał, że jeśli każdemu modowi promieniowania w rezonatorze (pudle) przydzielić energię  $k_B T$ , jak to wynika z klasycznej zasady ekwipartycji energii ( $k_B$  to stała Boltzmanna, a  $T$  –



Rys. 1.1. Obliczone widmo promieniowania równowagowego dla kilku temperatur oraz widmo przewidywane przez klasyczny model Rayleigha–Jeansa. Źródło: [Wikimedia Commons/Domena publiczna](#)

<sup>1</sup> Te zagadnienia omawiane są w podręcznikach podstaw fizyki, np. I. W. Sawieliew *Wykłady z fizyki* albo w dostępnym on-line podręczniku *Fizyka dla szkół wyższych*, t. 3.

temperatura), to gęstość energii zgromadzonej w modach o wysokiej częstotliwości jest nieskończona (dowód został sformalizowany przez sir Jamesa Jeansa w 1905 roku). *Modem* pola nazywamy w tym przypadku każdą możliwą falę stojącą w pudle (pojęcia tego używa się też dla fal propagujących). Prosty rachunek dla sześciennego pudła pokazuje, że liczba modów o długościach fali w przedziale  $\Delta\lambda$  wokół wartości  $\lambda$  jest proporcjonalna do  $\lambda^{-4}\Delta\lambda$ , a więc jest rozbieżna przy  $\lambda \rightarrow 0$ . Jeśli każdy mod ma taką samą średnią energię, to również energia na przedział długości fali (czyli *widmowa* albo *spektralna gęstość energii*) jest rozbieżna (czarna linia na rysunku 1.1). Energia promieniowania w ustalonym przedziale długości fali emitowanego przez otwór w pudle (czyli *radiacja widmowa* albo *spektralna*) również byłaby wtedy rozbieżna, a całkowita emitowana energia byłaby nieskończona. Rozbieżność dla krótkich fal nazwano „katastrofą w nadfiolecie”. W rzeczywistości nic takiego oczywiście się nie obserwuje.

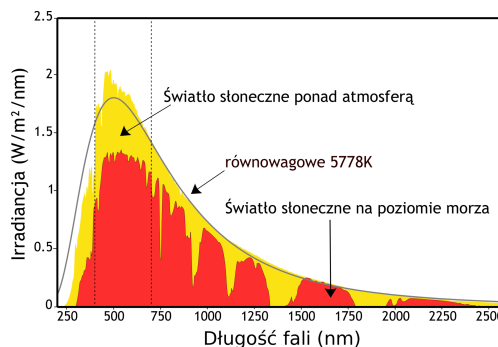
W roku 1900 Max Planck podał wzór (odgadnięty) dobrze opisujący faktycznie obserwowaną emisję z opisanego wyżej rezonatora z otworem, a następnie pokazał, że da się go odtworzyć, gdyby „hipotetycznie” założyć, że energia może być wymieniana pomiędzy promieniowaniem a materią (ściankami pudła) jedynie porcjami. Załóżmy<sup>2</sup>, że energia modu promieniowania nie zmienia się w sposób ciągły, lecz może jedynie być przydzielana lub odbierana porcjami (które Planck nazwał *kwantami*) o wartości  $\hbar\omega$ , gdzie  $\omega$  jest częstotliwością modu, a  $\hbar$  to stała Plancka. Wtedy zgodność z zasadami termodynamiki wymaga, żeby prawdopodobieństwo posiadania przez mod  $n$  kwantów energii było proporcjonalne do  $\exp[-n\hbar\omega/(k_B T)]$ . Dla modów o wysokich częstotliwościach ( $\hbar\omega \gg k_B T$ ), czyli o małych długościach fali, prawdopodobieństwo wzbudzenia choćby jednym kwantem energii staje się wykładniczo małe, więc – inaczej niż w przypadku klasycznej ekwipartycji – energia tych modów jest praktycznie zerowa. Przy takim założeniu widmowa gęstość energii w zależności od częstotliwości<sup>3</sup> opisywana jest rozkładem Plancka,

$$u(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp[\hbar\omega/(k_B T)] - 1}, \quad (1.1)$$

który wykładniczo maleje do 0 dla dużych częstotliwości. Prawo Plancka, dla różnych temperatur, przedstawione jest kolorowymi liniami na rysunku 1.1 (w funkcji długości fali). Model ciała doskonale czarnego dobrze opisuje emisję promieniowania przez obiekty, w których w wyniku absorpcji i re-emisji promieniowanie jest w równowadze termodynamicznej z materią o ustalonej temperaturze. Przykładem są gwiazdy: zgodność obserwowanego widma promieniowania słonecznego z przewidywaniami rozkładu Plancka potwierdza jego poprawność (rysunek 1.2).

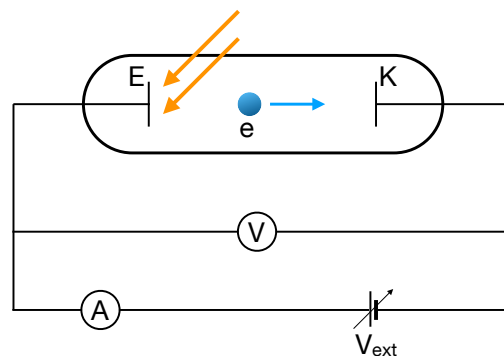
Kolejnym zjawiskiem, dla którego zawiódł opis klasyczny, jest efekt fotoelektryczny (Heinrich Hertz, 1887; rysunek 1.3). Światło padające na metaliczną powierzchnię emitera wybija elektrony, które mają pewną początkową energię kinetyczną. Poruszają się one do kolektora w polu potencjału zadanego zewnętrznym napięciem  $V_{\text{ext}}$  o takiej polaryzacji, że hamuje ono

Rys. 1.2. Obliczone widmo promieniowania równowagowego dla temperatury 5778 K oraz obserwowane widmo promieniowania słonecznego ponad atmosferą i na powierzchni Ziemi. Źródło: adaptacja pracy Nick84/Wikimedia Commons/CC-BY-SA-3.0.



<sup>2</sup> To nie jest oryginalne rozumowanie Plancka, tylko współczesny podręcznikowy wywód. Rozważanie zbliżone do oryginalnego można znaleźć w podręczniku Feynmana.

<sup>3</sup> Taka postać będzie nam potrzebna. Równoważną postać rozkładu Plancka w funkcji długości fali można znaleźć w podręcznikach albo w Wikipedii

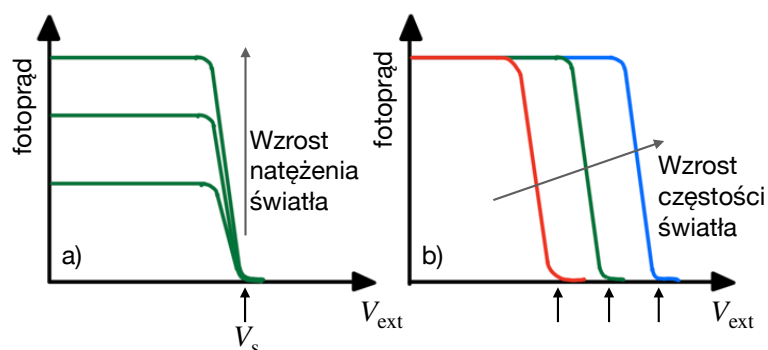


Rys. 1.3. Uproszczony schemat układu do pomiaru efektu fotoelektrycznego. E – emiter; K – kolektor; pomarańczowe strzałki symbolizują padające promieniowanie, a niebieska strzałka - ruch elektronu.

ruch elektronów. Gdy różnica energii potencjalnych elektronu przy kolektorze i emiterze, równa  $eV_{\text{ext}}$ , staje się większa od energii kinetycznej najszybszych wybijanych elektronów, żaden z nich nie dociera do kolektora i prąd w obwodzie spada do zera (rysunek 1.4). Napięcie zewnętrzne, przy którym się to dzieje ( $V_s$  na wykresach na rysunku 1.4), jest więc miarą maksymalnej energii kinetycznej elektronów.

W klasycznej elektrodynamice energia przekazana swobodnemu elektronowi przez pole elektryczne wiązki jest proporcjonalna do natężenia wiązki i czasu. Stąd należałoby się spodziewać, że wzrost natężenia światła powinien powodować wzrost energii kinetycznej emitowanych elektronów, a więc wzrost granicznego napięcia  $V_s$ . Nic takiego się nie dzieje (rysunek 1.4a); rośnie jedynie wartość fotoprądu (liczba wybijanych elektronów) dla napięć poniżej  $V_s$ . Nie obserwuje się też opóźnień w emisji elektronów czy też wzrostu ich energii kinetycznej z czasem, przewidywanego przez teorię klasyczną. Natomiast wzrost częstości światła zwiększa energię kinetyczną elektronów (rysunek 1.4b). Wyjaśnienie tych nieoczekiwanych własności zaproponował Albert Einstein (1905). Zapostulował on, że wiązka światła składa się z paczek energii (nazwanych później *fotonami*) o wartości postulowanej wcześniej przez Plancka ( $\hbar\omega$ ), które mogą być pochłaniane jedynie w całości, a pochłonięcie przez jeden elektron więcej niż jednej paczki energii jest mało prawdopodobne. Wtedy maksymalna energia kinetyczna elektronu równa jest energii fotonu pomniejszonej o pracę niezbędną do uwolnienia elektronu z metalu (pracę wyjścia) i zależy tylko od energii fotonu, a więc od częstości światła, zgodnie z wynikami doświadczeń.

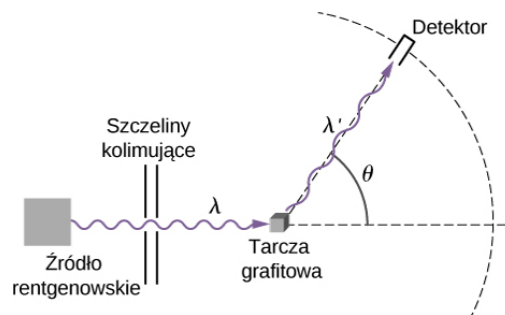
Trzecią obserwacją, która ostatecznie doprowadziła do sformułowania koncepcji fotonu jako cząstki, jest rozpraszanie promieniowania o wysokiej częstości na tarczach grafitowych (Arthur Compton, 1923; rysunek 1.5). Klasyczna elektrodynamika mówi, że ładunek poddany działaniu siły periodycznej (pochodzącej od pola elektrycznego fali elektromagnetycznej) w stanie ustalonym będzie drgał z częstością siły wymuszającej, czyli z częstością fali – jest to dobrze znane zagadnienie wymuszonego oscylatora harmonicznego. Drgający harmonicznym ładunek emituje fale elektromagnetyczne w różnych kierunkach, ale zawsze o częstości swoich drgań<sup>4</sup>. Taki model (rozpraszanie Thomsona) jest słuszny, o ile można pominąć efekty pola magnetycznego, a



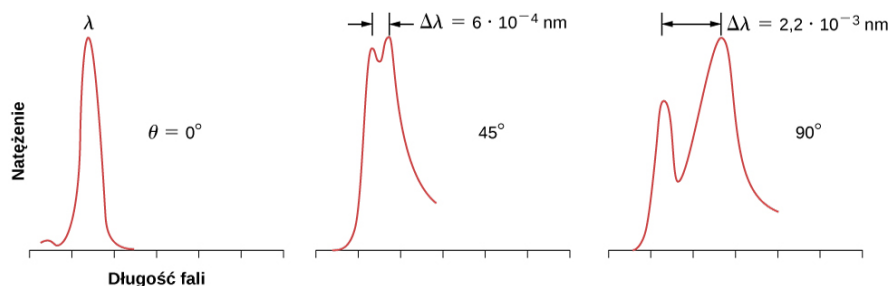
Rys. 1.4. Schematyczna prezentacja wyników pomiaru efektu fotoelektrycznego: Zależność fotoprądu od napięcia zewnętrznego przy zmianie natężenia (a) i częstości (b) światła.

<sup>4</sup> Patrz podręcznik elektrodynamiki Griffithsa lub wykłady Feynmana.

Rys. 1.5. Układ do badania efektu Comptona. Źródło: Katalyst Foundation/*Fizyka dla szkół wyższych*, t.3/CC-BY-SA-3.0.



Rys. 1.6. Typowe wyniki pomiaru efektu Comptona. Źródło: Katalyst Foundation/*Fizyka dla szkół wyższych*, t.3/CC-BY-SA-3.0.



więc dla małych natężeń i częstości fali elektromagnetycznej. Z kolei w przypadku dostatecznie dużych natężeń i częstości elektron przyspieszany jest do prędkości relatywistycznych, co powoduje dryf powodowany siłą Lorentza<sup>5</sup> i związane z tym przesunięcie Dopplera re-emitowanego (rozproszonego) światła. Efekt ten znika jednak w granicy małych natężeń promieniowania. Tymczasem obserwuje się (rysunek 1.6) przesunięcie długości fali rozproszonego światła w zależności od kąta rozpraszania  $\theta$  (zaznaczonego na rysunku 1.5) dla dowolnie małego natężenia promieniowania.

Wyjaśnienie obserwowanego zjawiska podał Compton, proponując jego opis w języku sprężystego zderzenia cząstek o określonej energii i pędzie. W tym opisie foton ma nie tylko energię  $\hbar\omega$  zaproponowaną przez Plancka, ale też pęd  $p = \hbar k = \hbar\omega/c$ , gdzie  $k$  jest liczbą falową promieniowania. Ma więc wszystkie atrybuty cząstki. Wysoka częstość promieniowania oznacza wysoką energię paczek fal, która pozwala pominąć względnie słabe związanie zewnętrznych elektronów w atomach tarczy i traktować je jako swobodne<sup>6</sup>. Taki cząsteczkowy opis pozwala odtworzyć wyniki pomiarów.

Wyniki tych historycznych doświadczeń, zwłaszcza doświadczenia Comptona, przekonały fizyków o realności istnienia fotonu. Było to jednak w jakimś stopniu „wnioskowanie z poszlak”, ponieważ we wszystkich tych eksperymentach mamy do czynienia z wielkimi liczbami fotonów. Obecnie mamy do dyspozycji detektory, które sygnalizują pojedyncze zdarzenia detekcyjne. W interpretacji tych pomiarów każde takie zdarzenie jest związane z detekcją pojedynczego fotonu i może się wydawać, że takie eksperymenty z „detekcją pojedynczych fotonów” dowodzą ich realnego istnienia. Jak się za moment przekonamy, tak nie jest.

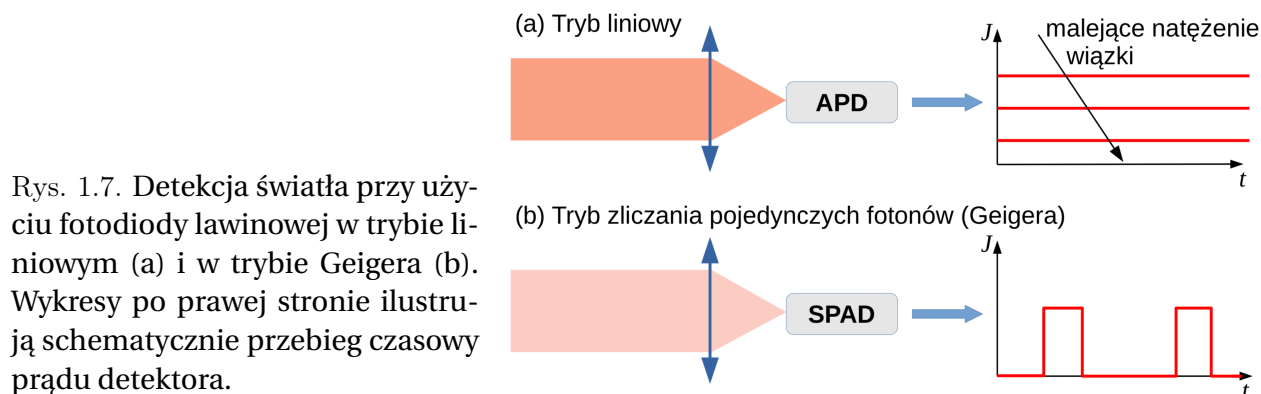
## 1.2. „Detekcja pojedynczych fotonów”

Standardowy detektor, np. powszechnie używana fotodioda lawinowa (*avalanche photodiode*, APD) generuje sygnał na wyjściu (umówmy się, że jest on rejestrowany jako prąd na wyjściu detektora) proporcjonalny do natężenia światła (rysunek 1.7(a))<sup>7</sup>. Jednak gdy natężenie wiązki

<sup>5</sup> Można to rozumieć jako efekt ciśnienia promieniowania – patrz podręcznik elektrodynamiki Griffithsa.

<sup>6</sup> Drugie maksimum na rysunku 1.6 odpowiada oddziaływaniu z silnie związanymi elektronami rdzenia, na których promieniowanie rozprasza się jak na całych atomach. Bardzo duża masa atomu (w porównaniu z elektronem) powoduje, że przesunięcie długości fali jest w takim przypadku bardzo małe.

<sup>7</sup> Pomijamy tu kwestię fluktuacji prądu detektora, którą zajmiemy się później.



staje się bardzo małe, detektor (nieco inny niż poprzednio lub pracujący w innym trybie, nazywanym trybem Geigera – *single-photon avalanche diode*, SPAD) zaczyna generować sygnał w postaci impulsów (rysunek 1.7(a)) pojawiających się w losowych chwilach czasu, zgodnie z pewną statystyką, którą zajmiemy się za chwilę. Podobnie jest w przypadku standardowego eksperymentu interferencyjnego Younga (z dwiema szczelinami)<sup>8</sup>. W przypadku bardzo małego natężenia wiązki obraz interferencyjny powstaje stopniowo jako suma wielu pojedynczych zdarzeń detekcyjnych zachodzących punktowo w określonych chwilach czasu. Kusząca jest interpretacja wiążąca te impulsy bądź punktowe zdarzenia detekcyjne z detekcją pojedynczych fotonów z wiązki. Jest ona uprawniona, jeśli *uprzednio* przyjmiemy model fotonowy. Jednak dyskretny ciąg zdarzeń detekcyjnych *nie dowodzi*, że światło ma naturę dyskretną (cząsteczkową); wystarczy założyć, że kwantową naturę ma detektor. Zobaczmy, że w takim przypadku faktycznie spodziewamy się dyskretnych zdarzeń detekcyjnych, nawet jeśli źródło jest klasyczne.

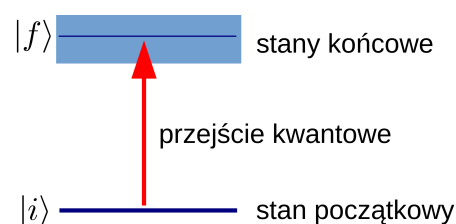
Założmy, że światło jest falą. Jeśli wiązka jest słaba, to efekt pola magnetycznego można pominąć i oddziaływanie światła z materią w przybliżeniu dipolowym ma znaną z klasycznej elektrodynamiki postać sprzężenia momentu dipolowego  $\mathbf{d}$  (który jest obserwabłą charakteryzującą układ materialny – tu detektor) z polem elektrycznym wiązki światła  $\mathcal{E}(t)$ ,

$$V = -\mathbf{d} \cdot \mathcal{E}(t) = -\mathbf{d} \cdot \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad (1.2)$$

gdzie  $\omega$  jest częstotliwością światła. Sygnał detekcji pojawia się w wyniku przejścia kwantowego z dyskretnego stanu podstawowego detektora do jednego ze stanów wzbudzonych tworzących continuum pod wpływem sprzężenia ze światłem (rysunek 1.8). W strukturze półprzewodnikowej jest to wzbudzenie międzypasmowe; to pojedyncze wzbudzenie jest potem wzmacniane do makroskopowego sygnału poprzez efekt lawinowy, czym nie musimy się tu zajmować. Ponieważ wiązka ma małe natężenie, zaburzenie pochodzące od oddziaływania jest słabe i możemy zastosować złotą regułę Fermiego opisującą przejścia kwantowe do continuum stanów pod wpływem słabego periodycznego zaburzenia. Zgodnie z tą regułą, przejście zachodzi w losowej chwili czasu, a prawdopodobieństwo jego zajścia w przedziale czasu  $(t, t + dt)$  równe jest  $w dt$ , gdzie

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \mathbf{d} \cdot \mathcal{E}_0 | i \rangle|^2 g(E_f = E_i + \hbar\omega). \quad (1.3)$$

Rys. 1.8. Przejście kwantowe w detektorze inicjujące zdarzenie detekcyjne.  $|i\rangle$  i  $|f\rangle$  oznaczają, odpowiednio, stan początkowy i końcowy detektora.



<sup>8</sup> Patrz np. eksperyment Hamamatsu Photonics 1981, <https://www.youtube.com/watch?v=I9Ab8BLW3kA>.



Tu  $|i\rangle$  i  $|f\rangle$  oznaczają, odpowiednio, stan początkowy i końcowy detektora, a  $g(E_f)$  jest gęstością stanów continuum wokół stanu końcowego. Ponadto, po relaksacji detektora, kolejne zdarzenie następuje znów w losowej chwili, niezależnie od poprzedniego. W rzeczywistym układzie ta relaksacja zajmuje pewien czas, co powoduje, że detektor jest „ślepy” przez pewien czas po zdarzeniu detekcyjnym, co ogranicza liczbę zliczeń w jednostce czasu. Np. w przypadku „tradycyjnych” detektorów opartych na fotodiodach lawinowych ten czas relaksacji jest rzędu  $1\ \mu\text{s}$ , co oznacza, że zastosowanie takiego detektora w trybie Geigera ograniczone jest do wiązek o strumieniu fotonów do  $10^6$  na sekundę. Nowoczesne detektory na nanodrutach nadprzewodzących (*superconducting nanowire single-photon detector* – SNSPD) mają ten „martwy czas” krótszy o 2-3 rzędy wielkości<sup>9</sup>. W naszych rozważaniach będziemy zakładać, że liczba zliczeń jest znacznie poniżej tej granicznej wartości detektora, czyli średni czas pomiędzy zliczeniami jest znacznie dłuższy od czasu relaksacji, którą można w związku z tym uznać za natychmiastową (brak „czasu martwego”).

Klasyczne (w sensie klasycznego pola elektromagnetycznego) przewidywanie złotej reguły Fermiego będzie dla nas punktem odniesienia w analizie przewidywanych sygnałów fotodetekcji dla kwantowych stanów światła. Dlatego potrzebujemy znać przewidywaną statystykę zliczeń, czyli rozkład prawdopodobieństwa dla liczby zliczeń w ustalonym przedziale czasu. To jest nieco ogólniejszy matematyczny problem, który rozważymy w osobnym podrozdziale 1.4 na końcu tego rozdziału.

### 1.3. O czym jest optyka kwantowa

Optyka kwantowa zasadniczo zajmuje się dwoma obszarami zagadnień: naturą samego światła i jego oddziaływaniem z materią. Tym też będziemy się zajmować w tym wykładzie.

W opisie światła będziemy poszukiwać zjawisk, których nie da się wyjaśnić na gruncie optyki falowej, a w szczególności takich, w których ilościowe wyniki pomiarów są sprzeczne z przewidywaniami teorii klasycznej. Okazuje się, że zdecydowaną większość zjawisk optycznych da się wyjaśnić klasycznie, to znaczy na gruncie teorii falowej (Maxwella). Są jednak takie zjawiska, w których przewidywania klasyczne zawodzą, natomiast można je wyjaśnić przyjmując cząsteczkowy (fotonowy) opis światła, co z metodologicznego punktu widzenia można uznać za dowód faktycznego „istnienia” fotonu. Szczegółowo omówimy dwie klasy takich zjawisk: statystykę liczby zdarzeń detekcji fotonów oraz statystykę korelacji pomiędzy zdarzeniami detekcyjnymi. Stany światła, które mają własności sprzeczne z przewidywaniami teorii klasycznej (falowej) nazywamy *nieklasycznymi*. Każde światło jest – jak dziś rozumiemy – kwantowe. Nie każde jednak jest nieklasyczne i trzeba odpowiednio skonstruować eksperyment, żeby takie nieklasyczne światło wytworzyć i dowieść jego nieklasycznej natury poprzez odpowiedni pomiar. Jednym z nieodzownych elementów takiego eksperymentu jest laser – właśnie pojawienie się laserów (1960), a więc silnych źródeł wysoce monochromatycznego, spójnego i skolimowanego światła, dało początek współczesnej optyce kwantowej. Takie źródło światła w oddziaływaniu z materią pozwala generować wiązki światła o bardzo ciekawych nieklasycznych własnościach. Paradoksalnie, samo światło laserowe jest w pewnym sensie najmniej nieklasycznym z możliwych stanów światła, a jego własności całkowicie dają się opisać przy użyciu klasycznych pojęć falowych.

Oddziaływaniem światła z materią będziemy się zajmować w znacznie mniejszym zakresie, ograniczonym do zjawisk najbardziej fundamentalnych. W standardowej optyce kwantowej rozważa się (i bada eksperymentalnie) oddziaływanie światła z podstawowymi elementami materii – atomami, zwykle traktując je w dodatku w sposób dalece uproszczony (słynny „atom dwupoziomowy”, z którym spotkamy się w dalszej części tego skryptu).

<sup>9</sup> Patrz np. [https://en.wikipedia.org/wiki/Superconducting\\_nanowire\\_single-photon\\_detector](https://en.wikipedia.org/wiki/Superconducting_nanowire_single-photon_detector).



Formalnie rzecz biorąc, promieniowanie elektromagnetyczne opisywane jest przez jednolitą teorię, która nie rozróżnia zakresów widmowych od najdłuższych fal radiowych do promieniowania Roentgena. Zakres częstości (bądź długości fal), który leży w obszarze zainteresowań optyki kwantowej scharakteryzowany jest w istocie przez metodologię eksperymentu, w którym wykorzystuje się standardowe techniki i elementy optyczne: dzielniki wiązki, soczewki, przesłony, a także pewien standardowy zestaw źródeł i detektorów światła (lasery, fotodiody lawinowe, macierze CCD, detektory nadprzewodzące). Jest to z grubsza zakres od dalekiej podczerwieni do bliskiego nadfioletu. Jak zobaczymy, potrzebna do wyjaśnienia tych eksperymentów teoria nie ma aspektu fundamentalnego (w odróżnieniu od elektrodynamiki kwantowej) i łączy kwestie bardziej podstawowe (formalny opis kwantowych stanów światła) z praktycznymi (np. kwantowy opis dzielnika wiązki).

Współcześnie metody optyki kwantowej stosowane są do badania podstaw teorii kwantowej oraz do implementacji elementarnych procedur kwantowej teorii informacji i komunikacji, w których kluczową rolę odgrywa splątanie kwantowe. Niestety ze względu na ograniczony zakres tego kursu nie będziemy się w stanie zająć tymi zagadnieniami. Drugim niezwykle istotnym obszarem, który musimy z konieczności pominąć (jeśli nie liczyć kilku prostych przykładów ilustrujących wykład) jest optyka kwantowa układów półprzewodnikowych, która łączy metody optyki kwantowej, kwantowej teorii układów otwartych i kwantowej teorii wielu ciał (i jest przez to dość trudna).

## 1.4. Statystyka zdarzeń niezależnych

Na koniec tego wstępnego rozdziału rozważmy problem rozkładu prawdopodobieństwa dla liczby niezależnych zdarzeń losowych w określonym przedziale czasu  $T$ . Niech początkowym momentem zliczania zdarzeń będzie  $t_0$ . Oznaczmy liczbę zdarzeń od czasu  $t$  do  $t'$  przez  $N(t, t')$  i wprowadźmy skrótowy zapis dla prawdopodobieństwa zaobserwowania  $n$  zdarzeń od  $t_0$  do  $t$ ,  $P[N(t_0, t) = n] \equiv p_n(t)$ . Kluczowym założeniem jest tu brak korelacji pomiędzy kolejnymi zdarzeniami. Prawdopodobieństwo zaistnienia zdarzenia w bardzo krótkim przedziale czasu  $(t, t + \Delta t)$  równe jest  $P[N(t, t + \Delta t) = 1] = w(t)\Delta t$  i nie zależy od wcześniejszej historii procesu, czyli od tego, w jakich chwilach następowały zdarzenia do chwili  $t$  i ile ich było<sup>10</sup>. Wielkość  $w(t)$  jest nazywana prawdopodobieństwem wystąpienia zdarzenia na jednostkę czasu. Zauważmy, że jeśli przedział czasu  $\Delta t$  jest tak krótki, że prawdopodobieństwo zaobserwowania dwóch lub więcej zdarzeń jest pomijalne, to  $w(t)\Delta t$  jest jednocześnie średnią liczbą zdarzeń w tym przedziale. W przypadku zliczeń obserwowanych na detektorze z rozdziału 1.2 wielkość ta jest proporcjonalna do natężenia wiązki światła padającej na detektor. Dopuszczamy dowolną deterministyczną zależność  $w$  od czasu. Zakładamy, że odcinek czasu  $\Delta t$  jest tak krótki, że wystąpienie dwóch lub więcej zdarzeń można pominąć (za chwilę przejdziemy do granicy  $\Delta t \rightarrow 0$ ).

Dla  $n > 0$  liczba zdarzeń do chwili  $t + \Delta t$  może wynieść  $n$  na dwa rozłączne sposoby: albo do chwili  $t$  było  $n - 1$  zdarzeń i nastąpiło zdarzenie w przedziale  $(t, t + \Delta t)$ , albo było  $n$  zdarzeń do chwili  $t$  i w tym przedziale czasu nie było zdarzenia,

$$p_n(t + \Delta t) = P[N(t_0, t) = n \wedge N(t, t + \Delta t) = 0] + P[N(t_0, t) = n - 1 \wedge N(t, t + \Delta t) = 1]. \quad (1.4)$$

Zgodnie z naszym założeniem, wystąpienie zdarzenia w przedziale czasu  $(t, t + \Delta t)$  jest niezależne od wszelkich zdarzeń do chwili  $t$ . Prawdopodobieństwo koniunkcji zdarzeń niezależnych równe jest iloczynowi prawdopodobieństw,

$$\begin{aligned} P[N(t_0, t) = n \wedge N(t, t + \Delta t) = 0] &= P[N(t_0, t) = n]P[N(t, t + \Delta t) = 0] = p_n(t)(1 - w(t)\Delta t) \\ P[N(t_0, t) = n - 1 \wedge N(t, t + \Delta t) = 1] &= P[N(t_0, t) = n - 1]P[N(t, t + \Delta t) = 1] = p_{n-1}(t)w(t)\Delta t. \end{aligned}$$

<sup>10</sup> Taki proces nazywamy Markowskim i mówimy, że nie ma on *pamięci*.

Podstawiając to do równania (1.4) mamy po oczywistych przekształceniach

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = w(t) [p_{n-1}(t) - p_n(t)].$$

Natomiast liczba zdarzeń do chwili  $t + \Delta t$  wynosi 0, jeśli było ich 0 do chwili  $t$  i żadne nie miało miejsca w przedziale czasu  $(t, t + \Delta t)$ , stąd

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -w(t)p_0(t).$$

W granicy  $\Delta t \rightarrow 0$  otrzymujemy stąd układ równań różniczkowych

$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -w(t)p_0(t), \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = w(t) [p_{n-1}(t) - p_n(t)], \quad n > 0, \quad (1.6)$$

z warunkiem początkowym  $p_0(t_0) = 1$  i  $p_n(t_0) = 0$  dla  $n > 0$ .

Rozwiązanie równania (1.5) znajdziemy łatwo przez rozdzielanie zmiennych,

$$\frac{dp_0}{p_0} = -w(t)dt \Rightarrow \ln p_0 = -\int_{t_0}^t d\tau w(\tau) + C,$$

czyli

$$p_0(t) = \exp \left[ -\int_{t_0}^t d\tau w(\tau) \right], \quad (1.7)$$

gdzie uwzględniliśmy warunek początkowy, z którego wynika  $C = 0$ . Równanie (1.6) można zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt} p_n(t) + w(t)p_n(t) = w(t)p_{n-1}(t),$$

skąd widać, że jest ono równaniem niejednorodnym, w którym  $w(t)p_{n-1}(t)$  jest wyrazem źródłowym. Równania takie rozwiązuje się metodą uzmiennienia stałej. Znajdujemy najpierw ogólne rozwiązanie równania jednorodnego

$$\frac{d}{dt} p_n(t) + w(t)p_n(t) = 0,$$

które ma identyczną postać jak równanie na  $p_0$ . Taką samą metodą znajdujemy więc

$$p_n(t) = C_n \exp \left[ -\int_{t_0}^t d\tau w(\tau) \right].$$

Następnie *uzmienniamy stałą*, tzn. szukamy rozwiązania pełnego równania postaci

$$p_n(t) = C_n(t) \exp \left[ -\int_{t_0}^t d\tau w(\tau) \right].$$

Podstawiając do równania (1.6) otrzymujemy

$$\dot{C}_n(t) = w(t)C_{n-1}(t), \quad C_0 = 1.$$

Stąd

$$C_1(t) = \int_{t_0}^t d\tau w(\tau),$$

$$\dot{C}_2(t) = w(t) \int_{t_0}^t d\tau w(\tau) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_{t_0}^t d\tau w(\tau) \right]^2 \Rightarrow C_2(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_{t_0}^t d\tau w(\tau) \right]^2,$$

⋮

$$\dot{C}_n(t) = \frac{1}{n} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t d\tau w(\tau) \right]^n \Rightarrow C_n(t) = \frac{1}{n!} \left[ \int_{t_0}^t d\tau w(\tau) \right]^n,$$

gdzie ostatnią, ogólną postać można udowodnić formalnie za pomocą indukcji matematycznej.

Widać więc, że prawdopodobieństwo liczby zdarzeń w przedziale czasu  $(t_0, t_0 + T)$  określone jest rozkładem Poissona

$$p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!},$$

z parametrem

$$\lambda = \int_{t_0}^{t_0+T} d\tau w(\tau).$$

Dla rozkładu Poissona mamy

$$\langle n \rangle \equiv \bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \lambda, \quad \langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n = \lambda^2 + \lambda, \quad (1.8)$$

stąd

$$(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \lambda = \bar{n},$$

czyli wariancja liczby zdarzeń równa jest średniej liczbie zdarzeń. W optyce kwantowej przyjęto określać statystyki o takiej własności jako *Poissonowskie*, choć sama równość wariancji i średniej nie oznacza, że mamy do czynienia z rozkładem Poissona<sup>11</sup>. Zauważmy, że względna niepewność liczby zdarzeń  $(\Delta n)/\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$  maleje ze wzrostem średniej liczby zdarzeń.

Jeśli  $w(t) = \text{const.}$ , to  $\lambda = wT$  i mamy do czynienia z procesem Poissona, który odpowiada umieszczeniu pewnej liczby zdarzeń na osi czasu, przy czym liczba zdarzeń jest zmienną losową o rozkładzie Poissona, a położenie każdego z nich na osi czasu jest losowe z jednorodnym prawdopodobieństwem na  $(t_0, t_0 + T)$  i niezależne od położenia wszystkich innych zdarzeń. Średnia liczba zdarzeń równa jest w takim przypadku  $\bar{n} = wT$ , stąd średni odstęp czasu pomiędzy zdarzeniami wynosi  $T/\bar{n} = 1/w$ .

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że funkcja  $w(t)$  jest deterministyczna, to znaczy w kolejnych powtórzeniach eksperymentu (niezbędnych, by empirycznie wyznaczyć kwantowomechaniczne wartości średnie) jej przebieg jest taki sam. W przypadku fotodetekcji (rozdział 1.2) oznaczałoby to, że natężenie wiązki jest stałe bądź modulowane w kontrolowany sposób w toku eksperymentu. Jak pokazaliśmy, dla dowolnej zależności czasowej statystyka fotodetekcji jest wtedy Poissonowska. Poza zasięgiem naszej dotychczasowej teorii pozostaje jednak ważny przypadek *losowych* fluktuacji funkcji  $w(t)$ , co odpowiada losowym fluktuacjom natężenia wiązki w procesie fotodetekcji. Jaka będzie wtedy statystyka liczby zdarzeń? Uogólnienia teorii na taki przypadek dokonujemy uwzględniając losowość wartości  $\lambda$ , wynikającą z losowego przebiegu funkcji  $w(t)$ . Dla ustalonego  $\lambda$  rozkład prawdopodobieństwa dla liczby zdarzeń (czyli *rozkład warunkowy* przy ustalonym  $\lambda$ ), który oznaczymy  $p_{n|\lambda}$  jest rozkładem Poissona, a więc

$$\sum_n n p_{n|\lambda} = \lambda, \quad \sum_n n^2 p_{n|\lambda} = \lambda^2 + \lambda,$$

(równanie (1.8)). Oznaczamy funkcję rozkładu prawdopodobieństwa dla parametru  $\lambda$  przez  $f(\lambda)$  i ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite<sup>12</sup> znajdujemy prawdopodobieństwo wystąpienia  $n$  zdarzeń,

$$p_n = \int d\lambda p_{n|\lambda} f(\lambda).$$

Stąd średnia liczba zdarzeń wynosi

$$\langle n \rangle = \sum_n n p_n = \sum_n n \int d\lambda p_{n|\lambda} f(\lambda) = \int d\lambda f(\lambda) \sum_n n p_{n|\lambda} = \int d\lambda f(\lambda) \lambda = \bar{\lambda},$$

<sup>11</sup> Taka terminologia wynika zapewne z faktu, że średnią i wariancję wyników pomiaru znaleźć można łatwo, a wyznaczenie pełnej statystyki jest trudne.

<sup>12</sup> Patrz np. [https://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie\\_o\\_prawdopodobieństwie\\_całkowitym](https://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_o_prawdopodobieństwie_całkowitym)

gdzie  $\bar{\lambda}$  jest średnią wartością parametru  $\lambda$  zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa  $f(\lambda)$ . Podobnie

$$\langle n^2 \rangle = \sum_n n^2 p_n = \sum_n n^2 \int d\lambda p_{n|\lambda} f(\lambda) = \int d\lambda f(\lambda) \sum_n n^2 p_{n|\lambda} = \int d\lambda f(\lambda) (\lambda^2 + \lambda) = \bar{\lambda}^2 + \bar{\lambda}.$$

Wariancja liczby zdarzeń wynosi więc

$$(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \bar{\lambda}^2 + \bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2 = \langle n \rangle + (\Delta \lambda)^2 \geq \langle n \rangle,$$

gdzie wykorzystujemy fakt, że wariancja parametru  $\lambda$ ,

$$\bar{\lambda}^2 - \bar{\lambda}^2 = (\Delta \lambda)^2 = \left\langle (\lambda - \bar{\lambda})^2 \right\rangle,$$

jest nieujemna. Statystyki, dla których  $(\Delta n)^2 > \langle n \rangle$  nazywamy *nad-Poissonowskimi*.

Z powyższych rozważań wynika ważny wniosek, że światło klasyczne o deterministycznym przebiegu fluktuacji zawsze generuje Poissonowską statystykę zliczeń. Losowość fluktuacji prowadzi do statystyki nad-Poissonowskiej. Model klasyczny nigdy nie prowadzi do pod-Poissonowskiej statystyki, to znaczy takiej, dla której  $(\Delta n)^2 < \langle n \rangle$ .

W tym rozdziale przypomnimy sobie kilka wybranych pojęć i faktów z zakresu optyki klasycznej, które będą istotne dla dalszych rozważań<sup>1</sup>, a także wprowadzimy notację, z której będziemy dalej korzystać.

## 2.1.

## Światło jako fala elektromagnetyczna

W klasycznym opisie światło jest falą elektromagnetyczną, czyli polem elektromagnetycznym zmieniającym się w czasie i przestrzeni. Najprostszą postacią takiej fali jest liniowo spolaryzowana monochromatyczna fala płaska,

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = 2\hat{e}\mathcal{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi), \quad (2.1)$$

gdzie  $\mathbf{r}$  i  $t$  oznaczają, odpowiednio, położenie i czas,  $\mathcal{E}_0$  jest amplitudą pola elektrycznego, jednostkowy wektor  $\hat{e}$  określa kierunek pola elektrycznego, a więc polaryzację fali,  $\mathbf{k}$  jest wektorem falowym, którego wartość (czyli liczba falowa) związana jest z długością fali,  $k = 2\pi/\lambda$ , a kierunek zgodny jest z kierunkiem propagacji fali,  $\omega$  jest częstością fali, związaną z liczbą falową relacją dyspersyjną  $\omega = ck$  ( $c$  jest prędkością światła), a  $\phi$  jest fazą fali. Zarówno amplituda  $\mathcal{E}_0$ , jak i wektor polaryzacji  $\hat{e}$  są tutaj rzeczywiste, ponieważ natężenie pola elektrycznego jest wielkością fizyczną, więc musi być rzeczywiste.

Wygodnie jest stosować zapis zespolony,

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{e}e^{i\phi}\mathcal{E}_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \text{c.c.}, \quad (2.2)$$

gdzie „c.c.” oznacza sprzężenie zespolone. Tak zapisane pole można uogólnić, dopuszczając dowolny zespolony jednostkowy wektor polaryzacji,

$$\hat{e} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \hat{e} \in \mathbb{C}^3, \quad \hat{e}^* \cdot \hat{e} = 1$$

(używając notacji „z kropką” dla zespolonego iloczynu skalarnego, piszemy sprzężenie zespolone jawnie). Taki zapis obejmuje pola o dowolnej polaryzacji<sup>2</sup>. Składowa pola wypisana jawnie w równaniu (2.2) zawiera zależność czasową  $e^{-i\omega t}$  i nazywana jest *składową o częstości dodatniej*. Jej sprzężenie zespolone nazywamy *składową o częstości ujemnej*; zawiera ono oczywiście czynnik  $e^{i\omega t}$ . Składową o częstości dodatniej będziemy oznaczać przez  $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$  i zazwyczaj będziemy się nią właśnie posługiwać zamiast pełnego fizycznego pola  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Będziemy używali zespolonej amplitudy wektorowej  $\mathcal{E}_0 = \hat{e}|\mathcal{E}_0|e^{i\phi}$ . Skalarną wielkość  $\mathcal{E}_0 = |\mathcal{E}_0|e^{i\phi}$  będziemy nazywali *amplitudą zespoloną* (albo po prostu amplitudą) pola<sup>3</sup>. Zauważmy, że moduł i argument amplitudy

<sup>1</sup> Systematyczny wykład optyki zawarty jest np. w bardzo dobrej książce B.E.A. Saleh, M.C. Teich, *Fundamentals of Photonics*.

<sup>2</sup> Czytelnik zechce sprawdzić, że  $\hat{e} = (1/\sqrt{2})(1, \pm i, 0)^T$ , przy  $\mathbf{k}$  w kierunku  $z$ , odpowiada fali o polaryzacji kołowej.

<sup>3</sup> Ponieważ  $\hat{e}$  jest zespolone, czynnik fazowy wydaje się nadmiarowy: fazę można włączyć do definicji  $\hat{e}$ . Istotnie, faza jest względna i nasza konwencja oznacza, że jest ona określona względem ustalonej polaryzacji  $\hat{e}$ . Pozorna nadmiarowość znika, kiedy mamy do czynienia z większą liczbą pól. Ich fazy, które mogą być różne, muszą być oczywiście odniesione do wspólnej, ustalonej polaryzacji.

zespolonej są, odpowiednio, amplitudą i fazą fali. Ostatecznie nasz zapis pola elektrycznego elektromagnetycznej fali płaskiej będzie miał postać

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} = \hat{\mathbf{e}} \mathcal{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.3)$$

Fizycznym, rzeczywistym polem jest  $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \text{cc.} = 2 \text{Re} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ . Dopuszczamy *wolno-zmienne* amplitudy pola  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(t)$ , tzn. takie, które zależą od czasu, ale wolno w porównaniu z szybkością zmian pola elektrycznego. Pozwala to opisać impulsowe pola o czasach trwania impulsów np. w typowym dla laserów zakresie setek femtosekund albo pikosekund.

Z równań Maxwella wynika, że w przypadku rozważanej tu fali biegnącej indukcja pola magnetycznego skierowana jest prostopadle do  $\mathcal{E}_0$  i do kierunku propagacji, jej amplituda wynosi (w układzie SI)  $B_0 = \mathcal{E}_0/c$  i oscyluje ona w fazie z polem elektrycznym, czyli

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathcal{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)},$$

gdzie ponownie piszemy jedynie składową o częstości dodatniej.

W optyce najczęściej interesują nas wiązki propagujące w określonym kierunku. Niech to będzie kierunek  $z$ , a więc  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = kz$ . Zauważmy, że ponieważ  $\omega = ck$ , mamy  $kz - \omega t = k(z - ct)$ . Pole zależy więc tylko od  $z - ct$  (a nie w dowolny sposób od  $z$  i  $t$ ), czyli  $\mathcal{E}(z, t) = \mathcal{E}(z - ct)$ . Taką własność mają też pola niebędące falami płaskimi, o ile propagują w jednym ustalonym kierunku, ponieważ każde takie pole (przy pewnych rozsądnych założeniach co do znikania w nieskończoności) można rozłożyć na fale płaskie. To oznacza, że pole w punkcie  $z$  w chwili  $t$  jest takie samo, jakie było w punkcie  $z - \Delta z$  we wcześniejszej chwili  $t - \Delta z/c$ , co jest dość oczywistą konsekwencją propagacji wszystkich fal elektromagnetycznych z prędkością  $c$ . Często, zwłaszcza w optyce kwantowej, interesuje nas jedynie przebieg pola wzdłuż kierunku propagacji, czyli – równoważnie – jego przebieg czasowy w ustalonym punkcie. Można wtedy przyjąć  $\mathbf{r} = 0$  i badać jedynie zależność od czasu.

Dla pól, które nie są monochromatyczne, zależności czasowe są oczywiście inne niż  $e^{\pm i\omega t}$ . Będziemy jednak zawsze zakładać, że podział na dobrze określone składowe o częstościach dodatnich i ujemnych jest możliwy. W szczególności ważne są wspomniane wyżej pola, w których amplituda lub faza zmieniają się z czasem. Jeśli zmiany te są wolne w porównaniu z oscylacjami pola, to światło ma nadal dobrze określoną częstość główną  $\omega$ , choć jego widmo jest poszerzone bądź występują w nim dodatkowe linie wokół częstości centralnej. W takim przypadku rozkład na składowe o częstościach dodatnich i ujemnych nadal ma sens.

Moc wiązki, czyli energia niesiona przez światło na jednostkę czasu, równa jest wartości wektora Poyntinga  $S = (\epsilon_0 c^2) |\mathcal{E} \times \mathbf{B}|$  scałkowanego po przekroju poprzecznym wiązki. Jeśli profil rozkładu mocy w przekroju wiązki jest ustalony, to wynik jest proporcjonalny do kwadratu natężenia pola elektrycznego w osi wiązki (bo  $B = \mathcal{E}/c$ ). Wielkość ta oscyluje, a sens fizyczny ma jedynie jej średnia wartość po pewnym przedziale czasu rzędu okresu fali. Nie wnikając w szczegóły profilu wiązki będziemy się posługiwać wielkością  $I = (1/2) \overline{\mathcal{E}^2(t)}$  jako miarą mocy wiązki (nazywając ją po prostu *mocą* lub *natężeniem wiązki*), oznaczając średnią po czasie przez kreskę nad uśrednianą wielkością. Jeżeli amplituda lub faza są modulowane, to zakładamy, że ich zmiany w czasie są znacznie wolniejsze niż oscylacje pola z częstością  $\omega$ , a więc przy uśrednianiu po krótkim przedziale czasu można je uznać za stałe (co oznacza, że wartość uśredniona nadal może zależeć od czasu, ale teraz już tylko poprzez wolne zmiany amplitudy zespolonej). Rozkładając pole na składowe o częstościach dodatnich i ujemnych zauważamy, że

$$\overline{\mathcal{E}^2(t)} = \overline{\mathcal{E}^{*2}(t)} = 0,$$

ponieważ te wyrażenia zawierają czynnik  $e^{\pm 2i\omega t}$ , którego średnia po okresie wynosi zero,

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt e^{\pm 2i\omega t} = 0,$$



co łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Natomiast  $\mathcal{E}^*(t) \cdot \mathcal{E}(t)$  nie zawiera szybkiej zależności od czasu, czyli

$$\overline{\mathcal{E}^*(t) \cdot \mathcal{E}(t)} = \mathcal{E}^*(t) \cdot \mathcal{E}(t).$$

Stąd znajdujemy natężenie wiązki w postaci dogodnej do rachunków:

$$I = \mathcal{E}^*(t) \cdot \mathcal{E}(t).$$

W przypadku pól losowych (*światło chaotyczne*) natężenie zdefiniowane jest jako średnia po realizacjach szumu, co odpowiada uśrednianiu po wielu pomiarach, w których przebieg szumu jest różny,

$$I = \langle \mathcal{E}^*(t) \cdot \mathcal{E}(t) \rangle.$$

Wprowadzone tu oznaczenie  $\langle \rangle$  będzie oznaczało średnią po realizacjach eksperymentu, czyli formalnie po realizacjach szumu, a w przypadku kwantowym – średnią kwantowomechaniczną.

Na koniec zauważmy, że jeśli ograniczymy się do jednego modu promieniowania (czyli fali o określonym wektorze falowym i polaryzacji), to stan pola jest w optyce klasycznej charakteryzowany przez amplitudę i fazę fali. Takie *pole jednomodowe* może się np. pojawić w rezonatorze optycznym, gdzie ma ono postać fali stojącej

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \hat{e}(\mathbf{r}) \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t},$$

gdzie  $\mathcal{E}_0 = |\mathcal{E}_0| e^{i\phi}$ , a  $\psi(\mathbf{r})$  jest przestrzenną funkcją modu (zastępującą czynnik opisujący falę płaską dla pól propagujących), nieistotną z punktu widzenia naszych rozważań. Okazuje się, że faza nie jest obserwabłą w teorii kwantowej, a więc parametryzacja amplituda–faza jest bezużyteczna w optyce kwantowej. Możemy jednak równoważnie sparametryzować pole w inny sposób, bardziej przydatny w opisie kwantowym. Ustalmy polaryzację fali  $\hat{e}$ , wybierzmy ustalony punkt  $\mathbf{r}$  i niech  $\hat{e}(\mathbf{r}) = \hat{e}$ ,  $\psi(\mathbf{r}) = 1$ . Pole elektryczne modu optycznego w tym punkcie ma postać

$$\tilde{\mathcal{E}}(t) = \hat{e} \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t} + \text{c.c.} = 2|\mathcal{E}_0| \text{Re} [\hat{e} e^{i\phi}] \cos \omega t + 2|\mathcal{E}_0| \text{Im} [\hat{e} e^{i\phi}] \sin \omega t. \quad (2.4)$$

W ten sposób rozłożyliśmy oscylacje pola na składowe, które są przesunięte względem siebie o  $\pi/2$ , czyli są *w kwadraturze*. Stąd wielkości  $\mathcal{E}_1 = |\mathcal{E}_0| \text{Re}[\hat{e} e^{i\phi}]$  oraz  $\mathcal{E}_2 = |\mathcal{E}_0| \text{Im}[\hat{e} e^{i\phi}]$  nazywa się (wektorowymi) amplitudami kwadratur albo po prostu *kwadraturami* pola. Oczywiście znajomość wartości kwadratur pozwala jednoznacznie wyznaczyć amplitudę oraz fazę i na odwrót. Zauważmy, że amplitudy kwadratur są częściami rzeczywistą i urojoną wektorowej amplitudy zespolonej:

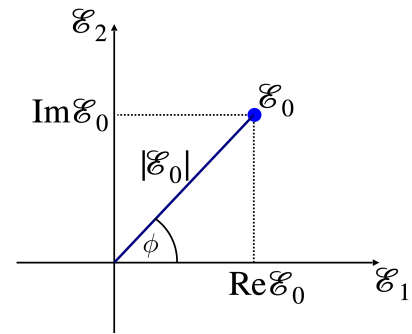
$$\mathcal{E}_1 = \text{Re} \mathcal{E}_0, \quad \mathcal{E}_2 = \text{Im} \mathcal{E}_0.$$

Jeżeli ograniczymy się do światła spolaryzowanego liniowo (tak będziemy robić dla uproszczenia w dalszej części wykładu), to można przyjąć  $\hat{e} \in \mathbb{R}^3$  i używać skalarnych amplitud kwadratur

$$\mathcal{E}_1 = |\mathcal{E}_0| \text{Re} e^{i\phi} = |\mathcal{E}_0| \cos \phi = \text{Re} \mathcal{E}_0, \quad \mathcal{E}_2 = |\mathcal{E}_0| \text{Im} e^{i\phi} = |\mathcal{E}_0| \sin \phi = \text{Im} \mathcal{E}_0.$$

Skalarne amplitudy kwadratur są więc częściami rzeczywistą i urojoną skalarnej zespolonej amplitudy pola.

Stan pola klasycznego może więc być określony na trzy sposoby: przez amplitudę będącą liczbą zespoloną, przez moduł i argument zespolonej amplitudy, które odpowiadają amplitudzie i fazie fali, oraz przez część rzeczywistą i urojoną zespolonej amplitudy, które w przypadku liniowej polaryzacji bezpośrednio odpowiadają amplitudom kwadratur. Oznacza to, że stan koherentnego pola jednomodowego jest reprezentowany przez punkt na płaszczyźnie  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$  traktowanej jako płaszczyzna zespolona, jak pokazano na rysunku 2.1, przy czym możemy się posługiwać współrzędnymi kartezjańskimi lub biegunowymi. Taką reprezentację nazywamy *diagramem fazowym* albo *kwadraturowym*.



Rys. 2.1. Reprezentacja koherentnego pola jednomodowego na diagramie fazowym.

## 2.2. Interferometry i koherencja

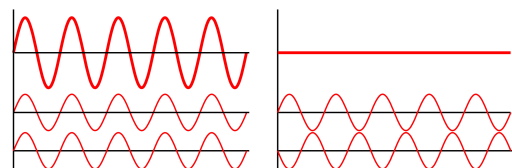
W tym rozdziale omówimy najbardziej powszechne interferometry i przekonamy się, że fundamentalną własnością, w pełni charakteryzującą własności pola na poziomie standardowych doświadczeń interferencyjnych jest funkcja korelacji pierwszego rzędu.

### 2.2.1. Koherencja podłużna i poprzeczna

Jedną z istotnych cech światła jest jego spójność fazowa, czyli koherencja. Najogólniej rzecz ujmując, koherencja oznacza zdolność fali do interferencji: aby powstał obraz interferencyjny, fazy dwóch tworzących go fal muszą być ustalone (ściślej: ustalona musi być różnica faz). Przypomnijmy sobie, że interferencja wynika z zasady superpozycji, obowiązującej dla wielu zjawisk falowych, w tym dla światła: pola elektryczne dwóch fal nakładających się na siebie w określonym punkcie dodają się (oczywiście wektorowo, ale tu umówimy się, że obie fale mają jednakowe polaryzacje i będziemy stosować zapis skalarny). Dwie fale mogą interferować konstruktywnie lub destruktywnie, zależnie od tego, czy – ujmując rzecz obrazowo – grzbiety fal spotykają się, czy też grzbiet jednej z fal trafiają na doliny drugiej (rysunek 2.2). Zauważmy, że w pierwszym przypadku amplituda fali (np. natężenie pola elektrycznego) podwaja się, a więc moc wiązki światła równa jest czterokrotności mocy każdej z wiązek składowych, natomiast w drugim przypadku moc jest zerowa. Interferencja konstruktywna następuje, gdy różnica faz dwóch wiązek wynosi 0 (albo wielokrotność  $2\pi$ ), natomiast destruktywna – gdy różnica faz równa jest  $\pi$  (albo nieparzystej wielokrotności  $\pi$ ). Gdyby różnica faz była losowa, to otrzymalibyśmy moc będącą średnią z tych dwóch skrajnych przypadków, a więc podwojoną moc każdej z wiązek – co dokładnie odpowiada sumie ich mocy. Tak jest niemal zawsze, gdy dwie wiązki światła pochodzą z różnych źródeł: w przeciwieństwie do techniki radiowej, w optyce niezmiernie trudno jest zsynchronizować fazy wiązek pochodzących z różnych źródeł. Stąd w zdecydowanej większości eksperymentów optycznych obie wiązki pochodzą z rozdzielania pojedynczej wiązki, pochodzącej z jednego źródła.

Tak jest np. w najbardziej chyba znanym eksperymencie Younga<sup>4</sup> z dwiema szczelinami: jedna fala pada na przesłonę z dwoma otworami, które traktujemy jako „źródła” dwóch wiązek<sup>5</sup>, których fazy są zgodne. W idealnym przypadku na ekranie ze przesłoną pojawi się układ naprzemiennie jasnych i ciemnych prążków. Różnica faz determinująca konstruktywny bądź

Rys. 2.2. Interferencja fal: konstruktywna (po lewej) i destruktywna (po prawej). Gruba linia na górze reprezentuje sumę dwóch fal przedstawionych poniżej.

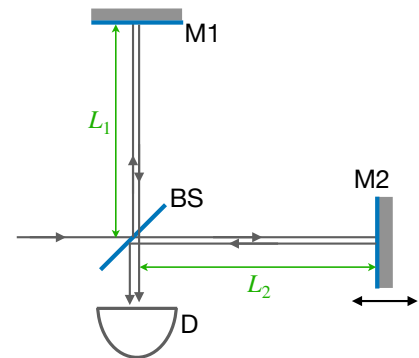


<sup>4</sup> [https://pl.wikipedia.org/wiki/Doświadczenie\\_Younga](https://pl.wikipedia.org/wiki/Do%C5%9Bwiadczenie_Younga)

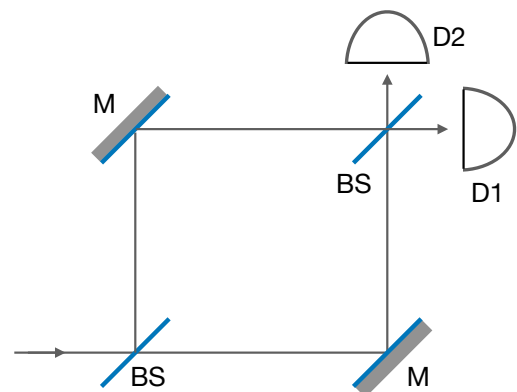
<sup>5</sup> Warto tutaj przypomnieć sobie [zasadę Huygensa](#).



destruktywny charakter interferencji jest tu konsekwencją różnicy dróg optycznych wiązek pochodzących z dwóch otworów. Eksperyment ten rodzi jednak dwa problemy interpretacyjne: Po pierwsze, fale propagujące z otworów są falami kulistymi, co nie jest fundamentalną przeszkodą, ale komplikuje opis. Po drugie, w tworzeniu obrazu interferencyjnego rolę odgrywa nie tylko koherencja podłużna, czyli spójność fazowa fal, które przeszły przez otwory w różnych chwilach czasu (by spotkać się w jednej chwili po przebyciu różnych dróg), co odpowiada przesunięciu wzdłuż kierunku propagacji pierwotnej fali padającej na przesłonę z otworami. Istotna jest tu też koherencja poprzeczna, czyli spójność fazowa pomiędzy dwoma różnymi punktami na froncie falowym, w których są otwory. To zmieszanie dwóch aspektów spójności fazowej powoduje, że eksperyment ten ma głównie znaczenie historyczne i pogładowe.



Rys. 2.3. Interferometr Michelsona, BS – dzielnik wiązki 50/50, M – lustra, D – detektor.



Rys. 2.4. Interferometr Macha-Zehndera, BS – dzielnik wiązki 50/50, M – lustra, D – detektory.

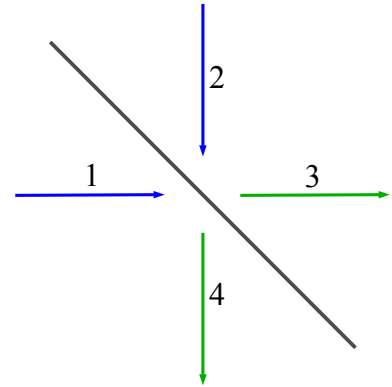
W tym wykładzie będzie nas interesować wyłącznie koherencja podłużna, którą badać można m.in. w dwóch powszechnie stosowanych rodzajach interferometrów: Michelsona i Macha-Zehndera. W przypadku obu tych interferometrów mamy do czynienia z jedną rozdzieloną wiązką. Wprowadźmy parametr  $s$  – drogę optyczną od miejsca podziału wejściowej wiązki do danego punktu wzdłuż biegu wiązki. Jeśli światło tworzy skolimowaną wiązkę, to propagacja jest efektywnie jednowymiarowa i w jednym kierunku. Wtedy pole przy osi wiązki (czyli tam, gdzie jego natężenie jest istotne) musi mieć postać  $\mathcal{E}(s, t) = \mathcal{E}(ks - \omega t) = \mathcal{E}[k(s - ct)]$ , ponieważ można je rozłożyć na fale płaskie o jednakowym kierunku propagacji, z których każda – niezależnie od częstości – propaguje z prędkością  $c$ . Jak już mówiliśmy, przebieg czasowy takiego pola jest równoważny jego przebiegowi przestrzennemu wzdłuż drogi propagacji,

$$\mathcal{E}(s + \Delta s, t) = \mathcal{E}[k(s + \Delta s) - \omega t] = \mathcal{E}[ks - \omega(t - \Delta s/c)] = \mathcal{E}(s, t - \Delta s/c). \quad (2.5)$$

W związku z tym, różnica dróg optycznych wiązek powstałych z podziału wiązki wejściowej jest równoważna ich względnemu przesunięciu w czasie. Ponieważ obie wiązki pochodzą z tej samej wiązki wejściowej  $\mathcal{E}(s, t)$ , odzwierciedlają jej przebieg przestrzenny i czasowy, a więc sumaryczne pole na wyjściu (w ustalonym punkcie) jest sumą dwóch pól, z których każde jest proporcjonalne do pola wejściowego, lecz z pewnym przesunięciem czasowym, innym dla każdej z wiązek i proporcjonalnym do ich dróg optycznych.

## 2.2.2. Dzielnik wiązki

Aby poprawnie opisać propagację światła w interferometrach Macha-Zehndera i Michelsona, potrzebujemy uświadomić sobie pewną fundamentalną własność dzielnika wiązki (ang. *beam-splitter*), dotyczącą relacji fazowych pomiędzy polami (modami) wchodzącymi i wychodzącymi (rys. 2.5). Fazy te oczywiście zależą od konstrukcji dzielnika wiązki i można je modyfikować umieszczając na wejściach i wyjściach elementy (płytki) fazowe. Jest jednak jeden związek, który musi być spełniony zawsze, by zachowana była energia. Związek ten okaże się bardzo ważny również w dalszych częściach podręcznika, gdy będziemy używać interferencji na dzielnikach wiązki do detekcji kwantowych stanów pola.



Rys. 2.5. Oznaczenie portów wejściowych (niebieskie) i wyjściowych (zielone) dzielnika wiązki.

Rozważmy dzielnik wiązki 50/50, tzn. wiązka padająca na jeden z portów wejściowych (1 lub 2 – patrz rys. 2.5) dzieli się na dwie wiązki o jednakowych natężeniach na portach wyjściowych 3 i 4. Pola na wyjściach dzielnika są kombinacjami liniowymi pól wejściowych z jednakowymi co do modułu współczynnikami, równymi  $1/\sqrt{2}$  (co gwarantuje podział mocy wejściowej po połowie na każde wyjście) i z pewnymi fazami,

$$\mathcal{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \mathcal{E}_1 e^{i\phi_{1t}} + \mathcal{E}_2 e^{i\phi_{2r}} \right], \quad (2.6a)$$

$$\mathcal{E}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \mathcal{E}_1 e^{i\phi_{1r}} + \mathcal{E}_2 e^{i\phi_{2t}} \right], \quad (2.6b)$$

gdzie oznaczenie r,t odnosi się do tego, czy dana wiązka wejściowa musiała przejść przez dzielnik (t) czy też się odbić (r). Ponieważ moc wiązki proporcjonalna jest do kwadratu modułu amplitudy danego modu pola, zasada zachowania energii wymaga, by sumy takich wielkości dla modów wejściowych i wyjściowych były sobie równe

$$\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3^* \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4^* \mathcal{E}_4. \quad (2.7)$$

Używając równań (2.6a) i (2.6b) znajdujemy

$$\mathcal{E}_3^* \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4^* \mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2 + 2 \operatorname{Re} \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 \left( e^{i\phi_{1t} - i\phi_{2r}} + e^{i\phi_{1r} - i\phi_{2t}} \right).$$

Piszemy  $\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 = |\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2| e^{i\theta}$  i – porównując z równaniem (2.7) – dostajemy

$$\cos(\phi_{1t} - \phi_{2r} + \theta) + \cos(\phi_{1r} - \phi_{2t} + \theta) = 0,$$

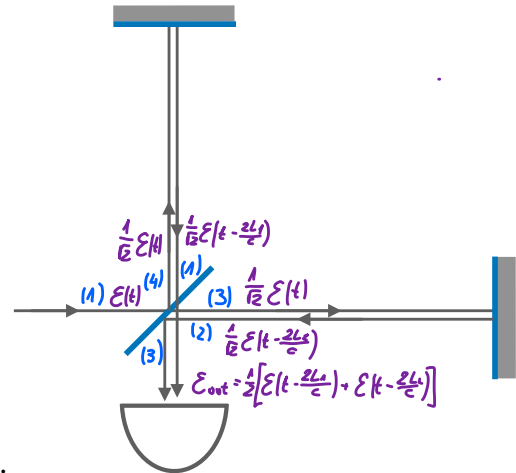
co jest równoważne

$$\cos \frac{\phi_{1t} - \phi_{2r} + \phi_{1r} - \phi_{2t} + 2\theta}{2} \cos \frac{\phi_{1t} - \phi_{2r} - \phi_{1r} + \phi_{2t}}{2} = 0.$$

Równość musi być spełniona dla dowolnych faz pól wejściowych, a więc dla dowolnego  $\theta$ . Stąd zerować musi się drugi kosinus, a więc

$$\phi_{1t} - \phi_{2r} - \phi_{1r} + \phi_{2t} = (2n + 1)\pi. \quad (2.8)$$

Oznacza to w szczególności, że jeśli fazy  $\phi_{1t}$  i  $\phi_{2r}$  są jednakowe (co można zawsze osiągnąć, np. przesuując fazę na porcie wyjściowym 3), to fazy  $\phi_{1r}$  i  $\phi_{2t}$  muszą być przeciwne (ale poza tym są dowolne). Podkreślmy raz jeszcze, że nie jest to własność konstrukcyjna czy materiałowa, lecz fundamentalna.



Rys. 2.6. Propagacja pól w interferometrze Michelsona. Na niebiesko oznaczone są wejścia i wyjścia dzielnika wiązki (dla obu kierunków propagacji) wg przyjętej tu konwencji.

### 2.2.3. Interferencja i funkcja korelacji 1. rzędu

Przeanalizujmy teraz efekt interferencyjny dla interferometru Michelsona<sup>6</sup> (analizę interferometru Macha–Zehndera pozostawiamy jako ćwiczenie). Rysunek 2.6 przedstawia pola na wejściach i wyjściach dzielnika wiązki (każda „strona” dzielnika wiązki w tym interferometrze może być wejściem albo wyjściem, zależnie od kierunku biegu wiązki) w ustalonej chwili czasu. Uwzględniono relację (2.5), wiążącą drogę wzdłuż ramion interferometru z przesunięciami czasowymi  $\Delta t_i = 2L_i/c$  (wiązka pokonuje każde z ramion tam i z powrotem, stąd czynnik 2). Przy przejściu wiązek przez dzielnik wiązki dwa razy stosujemy relację (2.8), wybierając  $\phi_{1t} = \phi_{1r} = \phi_{2t} = 0$ , oraz  $\phi_{2t} = \pi$ . Konwencja numeracji wejść i wyjść dzielnika wiązki opisana jest na rysunku (na niebiesko). Jak wynika z tej analizy, na wyjściu z interferometru w chwili  $t' = t + 2L_1/c$  otrzymujemy pole  $\mathcal{E}_{\text{out}}(t) = \frac{1}{2} [\mathcal{E}(t) + \mathcal{E}(t + \tau)]$ , gdzie  $\tau = 2(L_2 - L_1)/c$ . Natężenie wiązki na wyjściu równe jest

$$\begin{aligned} I_{\text{out}}(t') &= \langle \mathcal{E}_{\text{out}} \mathcal{E}_{\text{out}}^* \rangle = \frac{1}{4} \langle \mathcal{E}^*(t) \mathcal{E}(t) + \mathcal{E}^*(t + \tau) \mathcal{E}(t + \tau) + 2 \text{Re} \mathcal{E}^*(t) \mathcal{E}(t + \tau) \rangle \\ &= \frac{1}{4} [\langle \mathcal{E}^*(t) \mathcal{E}(t) \rangle + \langle \mathcal{E}^*(t + \tau) \mathcal{E}(t + \tau) \rangle + 2 \text{Re} \langle \mathcal{E}^*(t) \mathcal{E}(t + \tau) \rangle]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Uśrednianie w tych wzorach odnosi się do wielokrotnych powtórzeń eksperymentu, co pozwala uwzględnić ewentualną losowość pola.

Będziemy w tym wykładzie analizować niemal wyłącznie wiązki *stacjonarne*. Pojęcie to dotyczy eksperymentów, w których występuje pewna losowość, np. fluktuacje częstości, które powodują dryf fazy. Ogólnie rzecz ujmując, stacjonarność oznacza, że w warunkach eksperymentu nic się nie zmienia, a więc wszystkie obserwowane własności uśrednione po wielu powtórzeniach eksperymentu są niezależne od tego, w jakiej chwili zaczniemy obserwację (choć przebieg fluktuacji za każdym razem jest inny, gdyż są one losowe). W optyce, zarówno klasycznej, jak i kwantowej, uśrednione obserwowane własności wyrażają się przez wartości średnie wielkości fizycznych w ustalonej chwili czasu (np. natężenie wiązki  $\langle \mathcal{E}^*(t) \mathcal{E}(t) \rangle$ ) oraz przez *funkcje korelacji*, np.  $\langle \mathcal{E}^*(t) \mathcal{E}(t + \tau) \rangle$  (widzimy, że faktycznie w równaniu (2.9) występują wyłącznie takie wielkości). Warunek stacjonarności można więc wyrazić matematycznie w taki sposób, że

<sup>6</sup> Spektakularnym zastosowaniem takiego interferometru była w ostatnim czasie detekcja fal grawitacyjnych. Różnica dróg optycznych w takim eksperymencie jest związana z modyfikacją metryki czasoprzestrzeni przez falę grawitacyjną.

jednakowe przesunięcie argumentów czasowych wszystkich wielkości w uśrednianym iloczynie (co odpowiada odmierzaniu czasu od innej chwili początkowej) nie zmienia wartości funkcji korelacji, a więc w szczególności

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t) \rangle &= \langle \mathcal{E}^*(t+\tau)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle = I = \text{const.}, \\ \langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle &= \langle \mathcal{E}^*(0)\mathcal{E}(\tau) \rangle = G_{\mathcal{E}}(\tau). \end{aligned} \quad (\text{stacjonarność}) \quad (2.10)$$

Analogiczną własność mają średnie z większej liczby operatorów. Jak widać, średnia z iloczynu operatorów w  $n$  różnych chwilach czasu zależy tylko od  $n - 1$  argumentów czasowych (różnic czasu).

Funkcja autokorelacji  $G_{\mathcal{E}}(\tau)$  jest proporcjonalna do kwadratu natężenia pola, a więc do mocy wiązki. Aby uzyskać charakterystykę niezależną od mocy, wprowadza się unormowaną *funkcję korelacji pierwszego rzędu*<sup>7</sup>

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle}{\langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t) \rangle} \quad (\text{funkcja korelacji 1. rzędu}) \quad (2.11)$$

(definicję da się uogólnić na wiązki niestacjonarne, ale nie będziemy się tym zajmować). Zauważmy, że zawsze

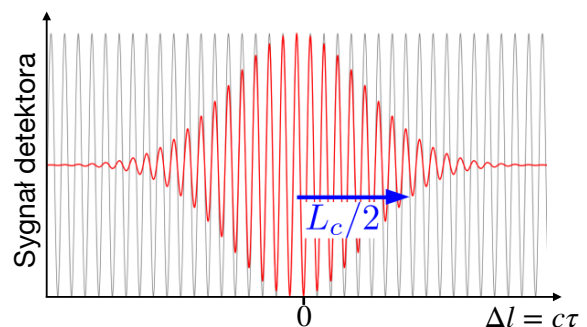
$$g^{(1)}(0) = 1.$$

Przy założeniu stacjonarności natężenie wiązki na wyjściu z interferometru Michelsona – równanie (2.9) – można więc zapisać w prostej postaci

$$I_{\text{out}} = \frac{1}{2} I [1 + \text{Re } g^{(1)}(\tau)].$$

Widzimy więc, że wynik doświadczenia interferencyjnego wyraża się w pełni przez funkcję korelacji 1. rzędu. Podobnie jest dla dowolnego interferometru, w którym następuje interferencja pól (ang. *field-field interference*). W dalszej części kursu spotkamy się z pojęciem interferencji *natężeniowej* (ang. *intensity* albo *photon-photon interference*), w której wyniki pomiarów wyrażają się funkcjami korelacji drugiego rzędu. Jak się okaże, właśnie takie funkcje korelacji drugiego rzędu niosą informację o kwantowych własnościach pola. Zauważmy, że rzędy funkcji korelacji określa się w odniesieniu do potęg natężenia (mocy) wiązki, a nie natężenia pola.

Rys. 2.7. Schematyczna reprezentacja prążków interferencyjnych otrzymanych w interferometrze Michelsona. Wykres przedstawia sygnał detektora w zależności od różnicy dróg optycznych w ramionach interferometru. Szara linia – przypadek idealny, światło doskonale koherentne; czerwona linia – przypadek rzeczywisty.



W idealnym przypadku światła całkowicie koherentnego i monochromatycznego mamy  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$ , stąd

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\mathcal{E}_0^* \mathcal{E}_0 e^{-i\omega\tau}}{\mathcal{E}_0^* \mathcal{E}_0} = e^{-i\omega\tau},$$

stąd

$$I_{\text{out}} = \frac{1}{2} I [1 + \cos\omega\tau] = \cos^2 \frac{\omega\tau}{2}$$

<sup>7</sup> Optycy wprowadzają bardziej złożone funkcje korelacji (albo *koherencji*), które uwzględniają składowe polaryzacyjne pola.

(pamiętamy, że  $\tau = \Delta l/c$ , gdzie  $\Delta l$  jest różnicą długości dróg optycznych w interferometrze). Wynik eksperymentu interferometrycznego (czyli interferogram) dla takiego przypadku przedstawiony jest szarą linią na rysunku 2.7. Zdefiniujemy *kontrast prążków*<sup>8</sup> (ang. *fringe visibility*) jako unormowaną różnicę pomiędzy największą a najmniejszą wartością sygnału na wyjściu interferometru,

$$v = \frac{I_{\text{out}}^{(\max)} - I_{\text{out}}^{(\min)}}{I_{\text{out}}^{(\max)} + I_{\text{out}}^{(\min)}}.$$

W przypadku światła idealnie koherentnego kontrast prążków wynosi 1 niezależnie od różnicy dróg optycznych. Oznacza to, że dowolnie odległe od siebie części wiązki wciąż interferują, a więc ich fazy są względem siebie ustalone: długość koherencji jest nieskończona. W rzeczywistym eksperymencie jest inaczej: gdy różnica dróg optycznych rośnie, kontrast prążków maleje, aż w końcu obraz interferencyjny znika zupełnie. Odległe od siebie części wiązki nie mają zdolności interferencji, ich fazy są przypadkowe, a więc długość koherencji jest skończona. Rzeczywisty przypadek przedstawiony jest na rysunku 2.7 czerwoną linią, a długość koherencji oznaczona tam jest przez  $L_c$  (dokładna wartość jest kwestią konwencji). Odpowiada jej czas koherencji  $\tau_c = L_c/c$ .

Zobaczmy, w jaki sposób kontrast prążków wiąże się z funkcją koherencji. Niech  $\omega$  będzie centralną częstotliwością światła, która opisuje oscylacje pola elektrycznego w wiązce. Jeśli zapiszemy

$$g^{(1)}(\tau) = |g^{(1)}(\tau)| e^{i\phi(\tau)} e^{-i\omega\tau},$$

to zależność czasowa wartości bezwzględnej oraz dodatkowej fazy będzie opisywać nieidealność wiązki, związaną z jej ograniczoną koherencją bądź niemonochromatycznością (jak zobaczymy, własności te są powiązane). Będziemy zakładać, że ta zależność czasowa jest wolna w porównaniu z okresem fali, można więc mówić o oscylacjach z częstotliwością  $\omega$ , modulowanych przez wolnozmienną amplitudę i względnie powolny dryf fazy. W przyjętym zapisie mamy

$$\text{Re } g^{(1)}(\tau) = |g^{(1)}(\tau)| \cos [\omega\tau - \phi(\tau)],$$

a więc

$$I_{\text{out}}^{(\max)} = \frac{1}{2} I [1 + |g^{(1)}(\tau)|], \quad I_{\text{out}}^{(\min)} = \frac{1}{2} I [1 - |g^{(1)}(\tau)|],$$

a stąd

$$v = |g^{(1)}(\tau)|.$$

<sup>8</sup> Mówimy o „prążkach interferencyjnych” ze względu na historyczny obraz prążków pojawiających się na kleszce w eksperymencie Younga z dwiema szczelinami. Współcześnie rejestrujemy, najczęściej przy pomocy komputera, sygnał detektora w zależności od pewnego parametru eksperymentu, którym tutaj jest wydłużenie jednego z ramion interferometru.



## Rozdział

# 3

## Przejścia promieniste, współczynniki Einsteina, lasery

Zanim zajmiemy się badaniem kwantowych stanów pola, omówimy jeszcze fenomenologiczną teorię przejść promienistych w atomach (i układach do nich podobnych, np. kropkach kwantowych) sformułowaną przez A. Einsteina. Następnie na tej podstawie spróbujemy zrozumieć na bardzo ogólnym poziomie działanie laserów w różnych trybach pracy.

### 3.1. Współczynniki Einsteina

Rozważamy *przejścia optyczne* (czyli takie, w których emitowane lub absorbowane jest światło) pomiędzy dwoma wybranymi poziomami „atomu”, oznaczonymi 1 i 2. Przez *poziom* rozumiemy zbiór stanów o jednakowej energii (zdegenerowanych). Energie poziomów oznaczamy przez  $E_i$ , a ich stopień degeneracji (liczbę stanów kwantowych) przez  $g_i$  (jest to powszechnie stosowany w optyce kwantowej model *atomu dwupoziomowego*, z tym że tutaj poziomy są zdegenerowane). Energię przejścia pomiędzy poziomami oznaczamy jako  $E_2 - E_1 = \hbar\omega_{\text{at}}$  (rysunek 3.1). Rozważamy ustaloną liczbę  $N$  atomów i oznaczamy przez  $N_i$  liczbę (populację) atomów znajdujących się „na poziomie energetycznym  $i$ ” (czyli w stanach kwantowych należących do tego poziomu). Oczywiście  $N_1 + N_2 = N = \text{const}$ .

Wobec oddziaływania z promieniowaniem, stany poziomu 2 nie są stabilne i w pewnym momencie spodziewamy się przejścia na poziom 1, któremu towarzyszyć będzie emisja światła (fotonu). Zakładamy, że dla każdego atomu z osobna rozważane przejście następuje w losowej chwili czasu, ze stałym prawdopodobieństwem na jednostkę czasu (rozdział 1.4) i niezależnie od innych atomów – jest to proces *emisji spontanicznej* (rysunek 3.2(a)). Wtedy liczba atomów, które w przedziale czasu  $dt$  przejdą z poziomu 2 do 1, jest proporcjonalna do liczby atomów na poziomie 2 oraz do długości przedziału czasu  $dt$ . Każde przejście pomniejsza liczbę atomów na poziomie 2, a więc

$$dN_2 = -A_{21}N_2 dt,$$

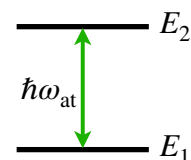
czyli

$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{\text{es}} = -A_{21}N_2 \quad (\text{emisja spontaniczna}), \quad (3.1)$$

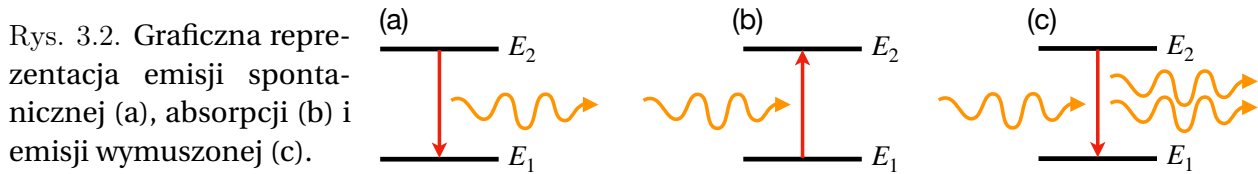
gdzie wprowadziliśmy *współczynnik Einsteina* dla emisji spontanicznej  $A_{21}$  i jawnie zaznaczyliśmy, że rozważamy zmianę liczby atomów tylko w wyniku tego jednego procesu. Rozwiązaniem tego równania jest oczywiście zanik wykładniczy

$$N_2(t) = N_2(0)e^{-t/\tau},$$

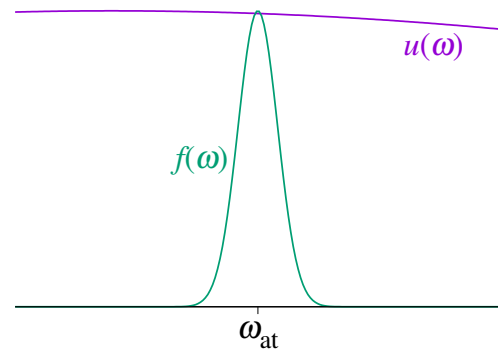
Rys. 3.1. Dwa poziomy atomowe, pomiędzy którymi następują przejścia optyczne.







Rys. 3.3. Schematyczne wykresy linii widmowej przejścia atomowego  $f(\omega)$  i widmowej gęstości energii pola  $u(\omega)$  w przypadku szerokiej gęstości widmowej.



gdzie wprowadziliśmy *promienisty czas życia*<sup>1</sup>  $\tau = 1/A_{21}$ . W atomach typowo jest on rzędu nanosekund do milisekund. W samorosnących kropkach kwantowych typowe czasy życia dla przejść promienistych to setki pikosekund do nanosekund.

Jeśli gęstość energii promieniowania w przedziale częstości wokół  $\omega_{at}$  jest niezerowa, to atom może zaabsorbować kwant energii pola (foton) i przejść z poziomu 1 do 2. Taki proces nazywamy *absorpcją* (rysunek 3.2(b)). Mówimy, że jest to proces *wymuszony* przez zewnętrzne promieniowanie (absorpcja może być tylko wymuszona). Liczba atomów, w których takie przejście nastąpi w przedziale czasu  $dt$  proporcjonalna jest do liczby atomów na poziomie 1 i przedziału czasu, jak poprzednio, ale również do ilości dostępnej energii w modach o odpowiedniej częstości. Miarą tej energii jest widmowa gęstość energii (rozdział 1.1) dla częstości w otoczeniu  $\omega_{at}$ . Formalnie rzecz biorąc, oddziaływanie atomu z promieniowaniem zależy od przekrycia linii widmowej  $f(\omega)$  odpowiadającej danemu przejściu z gęstością widmową pola  $u(\omega)$ . Będziemy w tym momencie zakładać, że atom oddziałuje z promieniowaniem, którego widmo częstości jest szerokie, tzn. istnieje kontinuum modów promieniowania o gęstości stanów, która jest w przybliżeniu stała w otoczeniu energii przejścia (rysunek 3.3). Wtedy całkę przekrycia można przybliżyć,

$$\int_0^{\infty} d\omega f(\omega) u(\omega) \approx u(\omega_{at}) \int_0^{\infty} d\omega f(\omega), \quad (3.2)$$

i jest ona proporcjonalna do wartości gęstości widmowej w częstości odpowiadającej energii przejścia atomowego. Tak jest w przypadku atomu w wolnej przestrzeni albo w jednorodnym (choćby w przybliżeniu) dielektryku. Nie musi tak być w rezonatorze albo w strukturze fotonicznej. Jeśli przybliżenie szerokiej gęstości spektralnej jest uprawnione, to mamy

$$\left. \frac{dN_1}{dt} \right|_a = -B_{12} N_1 u(\omega_{at}) \quad (\text{absorpcja}).$$

Pojawia się tu kolejny współczynnik Einsteina  $B_{12}$  (konwencja: indeksy są w kolejności stan początkowy – stan końcowy;  $A$  – proces spontaniczny,  $B$  – proces wymuszony).

Albert Einstein zauważył (1916), że nie da się opisać oddziaływania atomów z promieniowaniem w zgodzie z zasadami fizyki statystycznej, jeśli nie wprowadzi się trzeciego, mniej oczywistego rodzaju przejść: *emisji wymuszonej* (my za chwilę też to zobaczymy). Jest to proces,

<sup>1</sup> Bardziej poprawnie byłoby „średni czas życia ze względu na procesy promieniste”. Nie bądźmy jednak nadmiernymi purystami językowymi.



w którym niezerowa gęstość energii pola indukuje przejście z poziomu 2 do 1. Równanie dla populacji atomów ma oczywiście postać

$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{ew} = -B_{21}N_2u(\omega_{at}) \quad (\text{emisja wymuszona}).$$

W procesie emisji wymuszonej promieniowanie o niezerowej gęstości energii oddziałuje z atomem powodując emisję kolejnej porcji energii, czyli fotonu (rysunek 3.2(c)).

Pokażemy teraz (w ślad za Einsteinem), że współczynniki  $A_{21}$ ,  $B_{21}$  i  $B_{12}$  nie są niezależne. Załóżmy przede wszystkim, że współczynniki charakteryzują oddziaływanie atomu ze światłem w dowolnej sytuacji, opisywanej odpowiednią gęstością widmową  $u(\omega)$ , same natomiast są ustalonymi własnościami atomu. Można je wyznaczyć rozważając dowolną sytuację fizyczną. Przyjmijmy zatem, że atomy są w równowadze termodynamicznej z promieniowaniem termicznym (rozdział 1.1). W stanie równowagi szybkością przejść rządzi *zasada równowagi szczegółowej*: Niezależnie od możliwych przejść do wszelkich innych stanów, liczby przejść z poziomu 1 do 2 i z 2 do 1 muszą być równe<sup>2</sup>. Mamy więc

$$\left. \frac{dN_1}{dt} \right|_a = \left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{es} + \left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{ew} \Rightarrow B_{12}N_1u(\omega_{at}) = A_{21}N_2 + B_{21}N_2u(\omega_{at}). \quad (3.3)$$

Założyliśmy jednak, że atom jest w równowadze termodynamicznej. Populacje atomów w poszczególnych stanach kwantowych składających się na poziomy 1 i 2 muszą więc spełniać prawo Gibbsa

$$\frac{N_2/g_2}{N_1/g_1} = e^{-\hbar\omega_{at}/(k_B T)}, \quad (3.4)$$

gdzie uwzględniliśmy degenerację poziomów. Wyznaczając stąd  $N_1$  i podstawiając do równania (3.3) dostajemy po prostych przekształceniach

$$u(\omega_{at}) = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1/g_2)(B_{12}/B_{21})e^{\hbar\omega_{at}/(k_B T)} - 1}.$$

Wiemy jednak, że widmowa gęstość energii promieniowania w równowadze jest opisana prawem Plancka. Powyższy wynik musi więc być zgodny z równaniem (1.1). Jest to możliwe dla dowolnej temperatury wyłącznie wtedy, gdy

$$B_{21} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega_{at}^3} A_{21} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega_{at}^3} \frac{1}{\tau}; \quad B_{12} = \frac{g_2}{g_1} B_{21} = \frac{g_2}{g_1} \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega_{at}^3} \frac{1}{\tau}. \quad (3.5)$$

Jak widać, dla ustalonej częstości wszystkie współczynniki Einsteina można wyrazić przez promienisty czas życia  $\tau$ .

### 3.2. Szybkości przejść i reguły wyboru

Teoria Einsteina ma charakter fenomenologiczny. Opiera się na fundamentalnych zasadach i dostarcza relacji, które muszą być słuszne, ale nie wiąże współczynników z opisem na poziomie „mikroskopowym”, jaki oferuje mechanika kwantowa. Popatrzmy teraz na przejścia promieniste w atomach od strony teorii kwantowej. Opis ten stosuje się też do kropek kwantowych, z tym że w przypadku przejść międzypasmowych jako funkcje falowe należy wziąć funkcje Blocha.

<sup>2</sup> Załóżmy, że samo pojęcie równowagi zakłada, że nie zmieniają się populacje na poziomach (stan stacjonarny), ale to można by osiągnąć poprzez przejście cykliczne z udziałem trzeciego poziomu:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ . Takie stany stacjonarne istnieją w przyrodzie, ale wymagają pompowania energii do układu i dyssypacji, są więc stanami nierównowagowymi.

W mechanice kwantowej prawdopodobieństwo przejścia na jednostkę czasu dane jest złotą regułą Fermiego

$$w_{1 \rightarrow 2} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{21}|^2 g(\hbar\omega_{at}),$$

gdzie  $g(\hbar\omega_{at})$  jest gęstością końcowych stanów kontinuum, która w przypadku przejść pomiędzy dyskretnymi poziomami atomowymi równa jest gęstości stanów fotonowych o odpowiedniej energii, natomiast  $M_{21}$  jest elementem macierzowym hamiltonianu oddziaływania atomu ze światłem. Zauważmy, że element macierzowy jest *jedynym* parametrem charakteryzującym procesy oddziaływania ze światłem, co tłumaczy związek pomiędzy współczynnikami Einsteina. Ponadto  $M_{21} = M_{12}^*$ , więc współczynniki dla przejść wymuszonych różnią się wyłącznie ze względu na różną degenerację poziomów (opis kwantowy odnosi się do poszczególnych stanów kwantowych).

Jeśli rozmiar atomu jest znacznie mniejszy od długości fali (a tak jest w przypadku przejść optycznych w atomach i kropkach kwantowych), to w wiodącym rzędzie hamiltonian oddziaływania można zapisać w *przybliżeniu dipolowym*

$$H = -\mathbf{d} \cdot \mathcal{E},$$

gdzie  $\mathbf{d}$  jest operatorem momentu dipolowego atomu, a  $\mathcal{E}$  jest operatorem pola elektrycznego. Zauważmy, że klasycznie jest to po prostu energia dipola w polu elektrycznym. Przejścia opisywane przez ten hamiltonian określa się jako *dipolowe elektryczne* i oznacza E1 (jedynka oznacza tu pierwszy rząd rozwinięcia multipolowego). Nie będziemy w tej chwili wchodzić w formalizm pól kwantowych, by dokładnie opisać operator pola  $\mathcal{E}$ . Wystarczy nam informacja, że – podobnie jak w optyce klasycznej – można go zapisać w postaci  $\mathcal{E} = \hat{e}\mathcal{E}^{(+)} + \text{h.c.}$ , gdzie  $\hat{e}$  jest (zespolonym) wektorem polaryzacji, operator  $\mathcal{E}^{(+)}$  reprezentuje składową pola o dodatnich częstościach, a „hc” oznacza sprzężenie hermitowskie. Mamy wtedy

$$M_{12} \propto \langle 2|\mathbf{d} \cdot \hat{e}|1\rangle = e\langle 2|\mathbf{r}|1\rangle \cdot \hat{e},$$

gdzie skorzystaliśmy z definicji momentu dipolowego  $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ . Widzimy więc, że przejście spontaniczne jest *dipolowo dozwolone*, jeśli rzut elementu macierzowego operatora położenia na wektor polaryzacji pola jest niezerowy przynajmniej dla pewnej polaryzacji. Ponadto, gdy przejście jest wzbudzone w kontrolowany sposób światłem o ustalonej polaryzacji bądź gdy atom (albo kropka kwantowa) oddziałuje z polem o określonej polaryzacji (np. w rezonatorze o odpowiedniej geometrii lub w strukturze fotonicznej), to przejścia będą zachodzić w zależności od polaryzacji pola. Otrzymujemy w ten sposób *reguły wyboru* dla dipolowych przejść optycznych.

W atomach zastosowanie reguł wyboru jest łatwe w przybliżeniu jednocząstkowym, ponieważ stany elektronowe mają określony moment pędu, kątowna zależność ich funkcji falowych opisana jest harmonikami sferycznymi, a więc element macierzowy da się łatwo policzyć wprost. W przypadku półprzewodników o wysokiej symetrii (struktura blendy cynkowej, np. GaAs, InAs) funkcje Blocha w otoczeniu konkretnego atomu można traktować w przybliżeniu jak orbitale atomowe o określonej symetrii ( $p$  dla pasma walencyjnego,  $s$  dla pasma przewodnictwa), co pozwala zastosować przedstawioną tu teorię również do takich układów. W ogólniejszym opisie przejść atomowych należy uwzględnić sprzężenia spinowo-orbitalne i wieloelektronową naturę stanów atomowych.

Typowe czasy przejść E1 (dozwolonych dipolowo) w atomach mieszczą się w przedziale od 1 ns do 100 ns. Przejścia E2 (elektryczne kwadrupolowe) oraz M1 (magnetyczne dipolowe, czyli związane z działaniem pola magnetycznego w najniższym rzędzie rozwinięcia multipolowego) mają czasy życia o 4 rzędy wielkości dłuższe. Przejścia E3 i M2 są wolniejsze o kolejne 4 rzędy itd.<sup>3</sup> Występowanie przejść zarówno bardzo szybkich, jak i niezwykle wolnych (nawet w skali

<sup>3</sup> Patrz zestawienie w podręczniku: M. Fox, *Quantum Optics. An Introduction*.

minut i godzin), opisywano niegdyś poprzez ich klasyfikację na fluorescencję (przejścia „natychmiastowe” – układ świeci w czasie pobudzenia) i fosforescencję (przejścia z obserwowalnym opóźnieniem). Dziś jednak umiemy śledzić w czasie nawet najszybsze przejścia E1, a ponadto umiemy je opisywać i klasyfikować bardziej formalnie, więc ten podział ma raczej znaczenie historyczne. Istnieją też stany, dla których przejścia (jednofotonowe) są zabronione we wszystkich rzędach. Nazywamy je metastabilnymi. W półprzewodnikowych kropkach kwantowych jedynymi istotnymi przejściami są dipolowe elektryczne, ponieważ wszystkie przejścia wyższego rzędu są wolniejsze od procesów niepromienistych.

Ogólny opis reguł wyboru, również dla przejść wyższego rzędu niż dipolowe, uzyskuje się w ramach zaawansowanej teorii momentu pędu, w języku tensorów sferycznych i twierdzenia Wignera-Eckarta.

### 3.3. Lasery

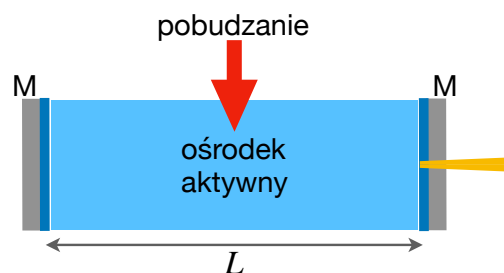
Pojawienie się laserów<sup>4</sup> (ok. 1960r.) dało początek współczesnej optyce kwantowej. Nie będziemy się tu zajmować w szczególności konstrukcją laserów, warto jednak zrozumieć od strony fizycznej zasady ich działania i poznać podstawy terminologii.

#### 3.3.1. Fizyczne podstawy emisji laserowej

Każdy laser składa się z rezonatora, w którym związane są mody promieniowania, oraz z ośrodka aktywnego, czyli materialnego ośrodka, który wymienia energię z promieniowaniem (rysunek 3.4). Ośrodek aktywny jest pobudzany (*pompowany*), to znaczy w jakiś sposób przekazywana mu jest z zewnątrz energia (standardowo odbywa się to elektrycznie albo optycznie). Można sobie wyobrazić, że światło wielokrotnie biegnie pomiędzy zwierciadłami ograniczającymi rezonator, oddziałując z materią ośrodka aktywnego. W tym oddziaływaniu wymieniana jest energia, co opiszemy, korzystając z fenomenologicznego formalizmu Einsteina, opisanego w rozdziale 3.1. Jedno z luster częściowo przepuszcza światło, pozwalając na opuszczenie układu przez wiązkę.

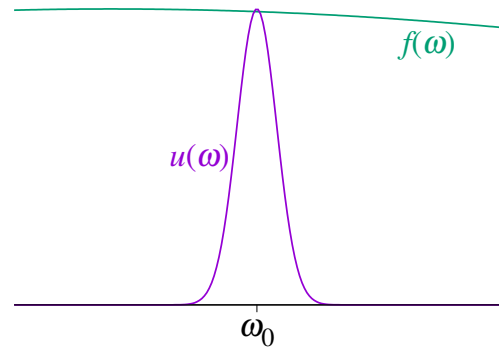
Relacja pomiędzy szerokością linii a widmową gęstością energii jest w przypadku rezonatora odwrotna niż rozważana w rozdziale 3.1: teraz gęstość widmowa jest wąska, ponieważ mody rezonatora są skwantowane, a ich czas życia jest względnie długi. Co prawda linia emisyjna pojedynczego atomu jest jeszcze węższa, ale widmo emisyjne bądź absorpcyjne ośrodka jest zdominowane przez poszerzenie niejednorodne (np. dopplerowskie dla gazu, bądź wynikające z rozkładu energii przejścia dla kropek kwantowych, co omówimy w kolejnym rozdziale), które jest dużo szersze (rysunek 3.5). Ponownie oddziaływanie jest dane całą przekrycia, jak w równaniu (3.2), ale teraz interpretujemy to w taki sposób, że mod rezonatora oddziałuje efektywnie z podzbiorem atomów, który jest w rezonansie z modem. Mamy w obecnym przypadku

$$\int_0^\infty d\omega f(\omega) u(\omega) \approx f(\omega_0) \int_0^\infty d\omega u(\omega) = f(\omega_0) u,$$



Rys. 3.4. Schematyczna reprezentacja lasera. M – lustro, L – długość rezonatora.

<sup>4</sup> Nazwa jest akronimem: ang. *light amplification by stimulated emission of radiation*.



Rys. 3.5. Schematyczne wykresy linii widmowej przejścia atomowego  $f(\omega)$  i widmowej gęstości energii pola  $u(\omega)$  w przypadku wąskiej gęstości widmowej. Tu odpowiednia linii widmowej  $f(\omega)$  odpowiada poszerzeniu niejednorodnemu i jest proporcjonalna do liczby atomów o danej częstotliwości przejścia atomowego.

gdzie  $\omega_0$  jest częstotliwością modu rezonatora, a  $u$  – całkowitą gęstością energii modu. Szybkość przejść absorpcyjnych będzie więc teraz wynosiła  $B_{12}N_1f(\omega_0)u$ , a emisyjnych (wymuszonych):  $B_{21}N_2f(\omega_0)u$ .

Chcemy, by energia przekazywana była z ośrodka aktywnego do promieniowania (czyli następowało *wzmocnienie*), a więc przejść emisyjnych (z wyższego poziomu do niższego) musi być więcej niż absorpcyjnych (z niższego do wyższego). Musi więc zachodzić  $B_{21}N_2f(\omega_0)u > B_{12}N_1f(\omega_0)u$ , czyli – korzystając z drugiej relacji (3.5) –  $N_2/g_2 > N_1/g_1$ . Sytuację taką nazywamy *inwersją obsadzeń*. Ale w równowadze spełnione jest prawo Gibbsa opisane równaniem (3.4), z którego wynika, że  $N_2/g_2 < N_1/g_1$ . Oznacza to, że w stanie równowagi inwersja obsadzeń nie jest możliwa, a więc nie może wystąpić wzmocnienie.

Aby opisać efekt wzmocnienia ilościowo, rozważmy wiązkę światła biegnącą w kierunku  $+z$  przez ośrodek materialny złożony z „atomów” dwupoziomowych. Niech  $W_{12} = B_{12}N_1f(\omega_0)u$  będzie liczbą przejść ze stanu 1 do 2 (absorpcja). Zdefiniujmy liczbę atomów na poziomie  $i$  na jednostkę objętości  $n_i = N_i/V$  i liczbę przejść na jednostkę objętości  $w_{12} = W_{12}/V$ . Mamy

$$w_{12} = \frac{1}{V}W_{12} = \frac{1}{V}B_{12}N_1f(\omega_0)u = B_{12}n_1f(\omega_0)u = \frac{g_2}{g_1} \frac{\pi^2 c^3}{n^3 \hbar \omega_{\text{at}}^3} \frac{1}{\tau} n_1 f(\omega_0) u,$$

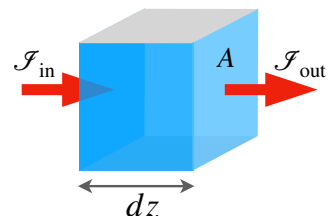
gdzie we wzorze (3.5) zastąpiliśmy  $c \rightarrow c/n$ , ponieważ w laserze światło propaguje w ośrodku aktywnym o współczynniku załamania  $n$ . Podobnie dla emisji wymuszonej,

$$w_{21} = \frac{\pi^2 c^3}{n^3 \hbar \omega_{\text{at}}^3} \frac{1}{\tau} n_2 f(\omega_0).$$

Rozważmy teraz bilans energii dla segmentu ośrodka aktywnego o bardzo małej szerokości  $\Delta z$  i polu przekroju poprzecznego  $A$ , przez który przebiega wiązka o strumieniu energii (czyli mocy na jednostkę powierzchni)  $\mathcal{I}$  (rysunek). Moc wchodząca wynosi  $P_{\text{in}} = A\mathcal{I}(z)$ , a moc wychodząca  $P_{\text{out}} = A\mathcal{I}(z + \Delta z)$ . Rozwijając ostatnie wyrażenie w szereg Taylora w najniższym (liniowym) rzędzie w  $\Delta z$  dostajemy bilans mocy

$$P_{\text{out}} - P_{\text{in}} = A \frac{d\mathcal{I}}{dz} \Delta z = \frac{d\mathcal{I}}{dz} \Delta V,$$

gdzie  $\Delta V = A\Delta z$  jest objętością rozważanego segmentu. Zasada zachowania energii wymaga, by nadwyżka mocy wychodzącej nad wchodzącą była równa energii przekazanej wiązce światła



Rys. 3.6. Ilustracja do równania ciągłości dla strumienia mocy wiązki.

przez ośrodek. Każde przejście  $2 \rightarrow 1$  wiąże się z przekazaniem wiązce energii  $\hbar\omega_0$  (pamiętamy, że z wiązką oddziałują tylko te atomy, które są w rezonansie,  $\hbar\omega_{\text{at}} = \hbar\omega_0$ ). W objętości  $\Delta V$  przejść takich jest  $w_{21}\Delta V$ . Natomiast każde przejście  $1 \rightarrow 2$  odbiera wiązkę energii  $\hbar\omega_0$ , a przejść takich jest  $w_{12}\Delta V$ . Mamy stąd moc przekazaną wiązce w rozważanym segmencie przez ośrodek aktywny

$$P_{\text{oa}} = (w_{21} - w_{12})\hbar\omega_0\Delta V.$$

Przyrównując do siebie dwa ostatnie równania otrzymujemy równanie ciągłości dla strumienia energii

$$P_{\text{out}} - P_{\text{in}} = P_{\text{oa}} \Rightarrow \frac{d\mathcal{I}}{dz} = (w_{21} - w_{12})\hbar\omega_0 = \hbar\omega_0 \frac{n^3\pi^2c^3}{\hbar\omega_0^3} \frac{1}{\tau} f(\omega_0) u \left( n_2 - \frac{g_2}{g_1} n_1 \right).$$

Ponieważ energia transportowana jest z prędkością  $c/n$ , gęstość energii związana jest ze strumieniem energii relacją

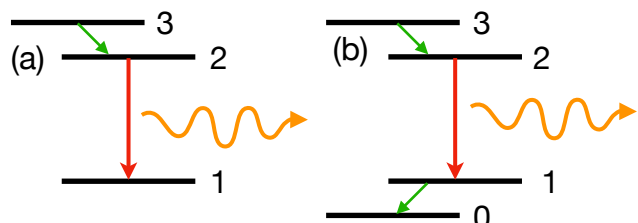
$$u = \frac{n}{c}\mathcal{I}.$$

Zdefiniujemy też ilościowo *inwersję obsadzeń*,  $\Delta n = n_2 - (g_2/g_1)n_1$ . Uwzględniając tę definicję i wykorzystując powyższe równanie mamy

$$\frac{d\mathcal{I}}{dz} = \gamma(\omega_0)\mathcal{I}, \quad \gamma(\omega_0) = \frac{\pi^2c^2}{n^2\omega_0^2\tau}\Delta n,$$

gdzie zdefiniowaliśmy *współczynnik wzmocnienia*  $\gamma(\omega)$ . Rozwiązaniem tego równania dla dodatniego wzmocnienia jest narastająca funkcja wykładnicza: moc wiązki rośnie, a więc faktycznie następuje wzmocnienie (w przeciwnym razie,  $\gamma(\omega_0) < 0$ , mamy po prostu do czynienia z pochłanianiem światła, czyli prawem Lamberta-Beera). Widzimy, że wzmocnienie jest proporcjonalne do współczynnika inwersji.

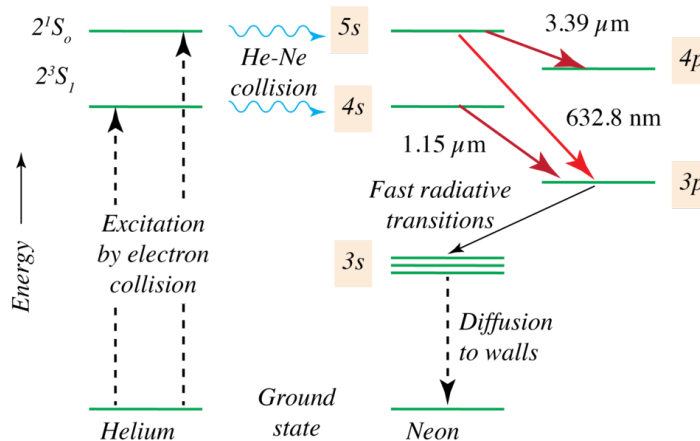
W praktyce dwa poziomy, pomiędzy którymi następuje przejście laserowe, są częścią nieco bardziej rozbudowanej struktury poziomów energetycznych, złożonej z trzech lub czterech poziomów przedstawionych schematycznie na rysunku 3.7. Pompowanie w zasadzie zawsze odbywa się przez pewien poziom 3, różny od górnego poziomu 2 przejścia laserowego, z którego następuje szybka relaksacja do poziomu 2. Takie rozwiązanie sprzyja efektywnemu tworzeniu inwersji obsadzeń, przy czym poziom 3 można wybrać tak, by łatwo było do niego wzbudzać (*wstrzykiwać*) nośniki. Fizyczna realizacja tych poziomów może być bardzo różna. W przypadku półprzewodnika jest to kontinuum stanów elektronu i dziury w pasmach, odpowiednio, przewodnictwa i walencyjnym. Wykorzystanie pasma zamiast pojedynczego poziomu 3 umożliwi wydajniejsze wstrzykiwanie i transport ładunku. W przypadku lasera helowo-neonowego (rysunek 3.8), jest to poziom wzbudzony atomów helu, który można wzbudzać poprzez zderzenia z elektronami przepuszczając przez układ prąd. Poziomem 2 jest jeden z dwóch wzbudzonych poziomów atomu neonu, do których przejście następuje poprzez wymianę energii w zderzeniu atomów He i Ne. W układzie możliwe są różne przejścia optyczne, a więc laser emituje wiele linii, z których jedna,  $\lambda = 632.8$  nm, leży w zakresie widzialnym, a pozostałe w podczerwieni (na rysunku zaznaczono tylko trzy z nich). Z kolei zapełnianie stanu 1 redukuje inwersję obsadzeń, stąd korzystna jest struktura poziomów, w której atomy szybko relaksują do pewnego niższego poziomu 0, opróżniając stan 1 (rysunek 3.7(b)). Tak właśnie jest w laserze He-Ne.



Rys. 3.7. Schematyczna reprezentacja przejść laserowych (czerwone strzałki) w ośrodku aktywnym o strukturze trypoziomowej (a) i czterypoziomowej (b).



Rys. 3.8. Struktura poziomów, mechanizm pobudzenia oraz przejścia kwantowe w laserze He-Ne. Wybrane przejścia laserowe oznaczono czerwonymi strzałkami. Źródło: XuPanda/Wikimedia Commons/CC-BY-SA-4.0.



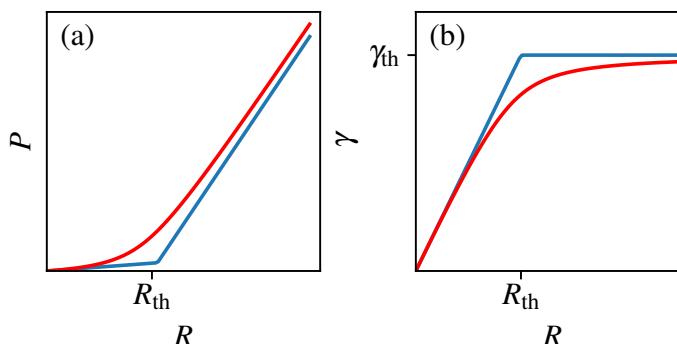
Kinetykę lasera omówimy w sposób uproszczony na przykładzie układu czteropoziomowego przedstawionego na rysunku 3.7(b). Dla uproszczenia będziemy zakładać, że poziomy są niezdegenerowane. Istotną cechą układu czteropoziomowego jest szybka relaksacja ze stanu 1 do 0, dzięki czemu można przyjąć, że stan 1 jest zawsze pusty, a więc inwersja obsadzeń jest po prostu równa liczbie atomów na poziomie 2, czyli  $n_2$  (na jednostkę objętości). Interesuje nas moc promieniowania emitowanego z lasera, która jest proporcjonalna do gęstości energii modu wewnątrz rezonatora  $u$ , oraz współczynnik wzmocnienia, który jest proporcjonalny do inwersji obsadzeń, a więc w obecnym przypadku do  $n_2$ ; poszukujemy więc tych dwóch wielkości. Zaczniemy od przybliżonej dyskusji jakościowej, a następnie sformułujemy opis bardziej ilościowy.

Gdy pobudzenie jest słabe, gęstość energii modu rezonatora jest mała i w kinetyce przejścia laserowego dominuje emisja spontaniczna. Niech szybkość pompowania (liczba atomów przechodzących ze stanu 3 do 2 na jednostkę czasu i objętości ośrodka aktywnego<sup>5</sup>) wynosi  $R$ , a czas życia (który może obejmować procesy niepromieniste, emisję do modu rezonatora oraz emisję do modów niezwiązanych w rezonatorze) –  $\tau$ . W stanie stacjonarnym liczba atomów przechodzących (na jednostkę czasu i objętości) ze stanu 2 do 1 w wyniku emisji spontanicznej, czyli  $n_2/\tau$ , musi być dokładnie równoważona przez pompowanie stanu 2, a więc  $R = n_2/\tau$ , stąd

$$n_2 = R\tau \quad (\text{słabe pobudzenie}).$$

Niech  $\beta \leq 1$  będzie względną częścią procesów relaksacji  $2 \rightarrow 1$ , które związane są z emisją do modu rezonatora (tylko część emitowanych spontanicznie fotonów trafia do tego modu). Wtedy przyrost gęstości energii rezonatora na jednostkę czasu równy jest  $\hbar\omega\beta n_2/\tau$  i musi być równy stratom związanym z emisją promieniowania z rezonatora  $\Gamma u$ , która proporcjonalna jest do gę-

Rys. 3.9. Zależność mocy lasera (a) oraz współczynnika wzmocnienia (b) od mocy pobudzenia. Niebieskie linie: schematyczna zależność zgodna z analizą przypadków granicznych. Czerwone linie: rozwiązanie równań kinetycznych dla lasera czteropoziomowego. Przyjęto  $\beta = 0.05$ .



<sup>5</sup> Technicznym parametrem jest prąd pompowania (wstrzykiwania, albo *iniekcji ładunku*, ang. *injection current*)  $J = eVR$ , gdzie  $V$  jest objętością układu.

stości energii ( $\Gamma$  jest szybkością ucieczki fotonów, czyli odwrotnością czasu uwięzienia fotonu w rezonatorze). Przyrównując dwie ostatnie wielkości znajdujemy

$$u = \frac{\hbar\omega_0\beta}{\Gamma\tau}n_2 = \frac{\hbar\omega_0\beta R}{\Gamma} \quad (\text{słabe pobudzenie}).$$

Widzimy więc, że w warunkach słabego pobudzenia zarówno inwersja obsadzeń, a więc współczynnik wzmocnienia, jak i gęstość energii, a więc moc lasera, są proporcjonalne do mocy pompowania (prądu iniekcji), a współczynnik proporcjonalności wynika z równowagi pomiędzy pompowaniem a stratami rezonatora. Zależności te przedstawione są schematycznie w postaci niebieskich linii dla  $R < R_{\text{th}}$  na rysunku 3.9.

W granicy silnego pobudzenia dynamikę gęstości energii determinuje emisja wymuszona i straty rezonatora. Mamy więc, pomijając emisję spontaniczną,

$$\frac{du}{dt} = \hbar\omega_0 B_{21} f(\omega_0) n_2 u - \Gamma u = [\hbar\omega_0 B_{21} f(\omega_0) n_2 - \Gamma] u,$$

gdzie pomijamy wpływ emisji spontanicznej. Dla ustalonego  $n_2$  rozwiązaniem tego równania jest funkcja wykładnicza, która narasta dla  $n_2 > n_{\text{th}} = \Gamma / [\hbar\omega_0 B_{21} f(\omega_0)]$  i zanika dla  $n_2 < n_{\text{th}}$ . Gdyby w pewnej chwili obsadzenie poziomu 2 wzrosło powyżej wartości progowej  $n_{\text{th}}$ , to nastąpi wykładniczy wzrost gęstości energii, co spowoduje wykładniczy przyrost wydajności emisji wymuszonej i w konsekwencji szybki spadek wartości  $n_2$ . Odwrotnie, jeśli  $n_2 < n_{\text{th}}$ , to emisja wymuszona wykładniczo słabnie i następuje akumulacja liczby atomów na poziomie 2. Widzimy więc, że nieliniowy układ dynamiczny reprezentujący laser ma własność *samoregulacji*: liczba atomów na poziomie 2 w reżimie silnego pobudzenia ustala się na poziomie wartości progowej

$$n_2 = n_{\text{th}} = \frac{\Gamma}{\hbar\omega_0 B_{21} f(\omega_0)} \quad (\text{silne pobudzenie}).$$

Oznacza to, że początkowy liniowy wzrost współczynnika wzmocnienia *wysyca się* na wartości proporcjonalnej do  $n_{\text{th}}$ , gdy pobudzenie staje się silne. Wartość ta reprezentowana jest poziomą częścią niebieskiej linii na rysunku 3.9(b). Z kolei stacjonarność wartości  $n_2$  wymaga równowagi pomiędzy pompowaniem a emisją spontaniczną i wymuszoną, a więc  $R = B_{21} f(\omega_0) n_2 u + n_2 / \tau$ . Podstawiając  $n_2 = n_{\text{th}}$  otrzymujemy

$$u = \frac{\hbar\omega_0}{\Gamma} (R - R_{\text{th}}), \quad R_{\text{th}} = \frac{\Gamma}{\hbar\omega_0 B_{21} f(\omega_0) \tau} \quad (\text{silne pobudzenie}). \quad (3.6)$$

Wprowadziliśmy tu progową wartość pobudzenia  $R_{\text{th}}$ . Zauważmy, że liniowa zależność  $n_2 = R\tau$  osiąga wartość wysycenia  $n_2 = n_{\text{th}}$  właśnie dla  $R = R_{\text{th}}$ , stąd przyjęto, że ta właśnie wartość określa próg akcji laserowej układu. Zależność mocy lasera od pompowania w reżimie silnego pobudzenia jest w naszym modelu nadal liniowa, ale o znacznie większym nachyleniu niż dla słabego pobudzenia (rysunek 3.9(a), niebieska linia).

Dość łatwo można znaleźć pełną zależność parametrów  $u$  i  $n_2$  naszego lasera od intensywności pobudzenia w stanie stacjonarnym. Zarysujemy tu metodę rozwiązania, pozostawiając czytelnikowi przeliczenie szczegółów. Piszemy równania kinetyczne uwzględniające wszystkie wspomniane wyżej procesy,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \left[ B_{21} f(\omega_0) n_2 u + \beta \frac{n_2}{\tau} \right] \hbar\omega_0 - \Gamma u, \\ \frac{dn_2}{dt} &= R - B_{21} f(\omega_0) n_2 u - \frac{n_2}{\tau}. \end{aligned}$$

Następnie wprowadzamy przeskalowane bezwymiarowe zmienne  $x, y$  oraz przeskalowaną intensywność pompowania  $r$ ,

$$n_2 = n_{\text{th}} x, \quad u = \frac{1}{B_{21} f(\omega_0) \tau} y, \quad R = R_{\text{th}} r,$$

które znacząco upraszczają nasz układ równań kinetycznych,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \Gamma(xy + \beta x - y), \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\tau}(r - xy - x).\end{aligned}$$

Szukając stanu stacjonarnego (czyli takiego, w którym parametry nie zmieniają się w czasie), przyrównujemy obie pochodne do 0, otrzymując układ nieliniowych równań algebraicznych,

$$\begin{aligned}xy + \beta x - y &= 0, \\ r - xy - x &= 0.\end{aligned}$$

Dodając te równania stronami, dostajemy równanie liniowe, z którego wyznaczamy  $x = (r - y)/(1 - \beta)$ , co podstawiamy do pierwszego równania, rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe na  $y$ , odrzucamy niefizyczne rozwiązanie ujemne (bo  $y$  jest gęstością energii) i dostajemy

$$y = \frac{1}{2} \left( r - 1 + \sqrt{(r - 1)^2 + 4\beta r} \right), \quad x = \frac{r - y}{1 - \beta}.$$

To rozwiązanie wykreślone jest czerwonymi liniami na rysunku 3.9.

### 3.3.2. Tryby pracy lasera

Światło laserowe ma kilka bardzo istotnych cech. Po pierwsze jest ono bardzo silnie skolimowane (czyli propaguje w dużym stopniu równoległe do osi wiązki). Wynika to z tego, że wiązka światła w laserze wielokrotnie przebiega przez długość rezonatora. Składowe wiązki, których kierunek propagacji nie jest dokładnie równoległy do osi rezonatora, po pewnej liczbie odbić trafiają w boczne ścianki rezonatora i są pochłaniane. Silna kolimacja wiązki opuszczającej laser pozwala bardzo dobrze ją zogniskować, co umożliwia osiągnięcie bardzo dużej gęstości mocy.

Własności widmowe wiązki zależą od trybu pracy lasera. Związane jest to z tym, że rzeczywisty rezonator podtrzymuje nie tylko jeden mod, jak to dotąd zakładaliśmy w naszych uproszczonych modelach, lecz wiele różnych modów. Dotyczy to zarówno przestrzennego rozkładu pola w kierunku podłużnym, czyli wzdłuż osi rezonatora, jaki i w kierunku poprzecznym.

Rozkład pola w kierunku poprzecznym, czyli mod poprzeczny, w przybliżeniu przyosiowym da się opisać funkcją Gaussa-Hermite'a, znaną z kwantowej teorii dwuwymiarowego oscylatora harmonicznego,

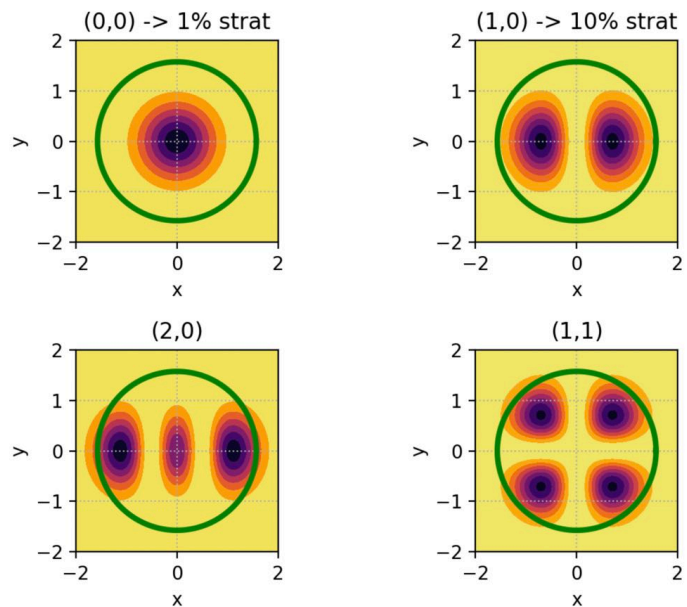
$$\mathcal{E}(x, y) = \mathcal{E}_0 H_m \left( \frac{\sqrt{2}x}{w} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{w} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}},$$

gdzie  $H_n(x)$  jest wielomianem Hermite'a,  $w$  charakteryzuje szerokość wiązki, a wiązka propaguje w kierunku  $z$ . Mody oznaczamy parą liczb  $(m, n)$ . Mod  $(0, 0)$  nazywamy podstawowym. Mody poprzeczne wyższego rzędu są niekorzystne z dwóch powodów: Po pierwsze, ponieważ wyższe mody mają większą średnią wartość poprzecznej składowej wektora falowego, ich energia jest wyższa niż dla modu podstawowego o tej samej długości fali wzdłuż rezonatora, co oznacza obniżenie stopnia monochromatyczności światła. Po drugie, gęstość energii modów wyższego rzędu jest rozłożona dalej od osi, a w przypadku nieparzystego  $m$  lub  $n$  zeruje się w osi wiązki (rysunek 3.10). Mody wyższego rzędu powinny więc zostać wytłumione, co określamy jako *selekcję modu poprzecznego*.

W celu selekcji podstawowego modu poprzecznego można wykorzystać fakt że mody wyższego rzędu charakteryzują się szerszym rozkładem gęstości energii w płaszczyźnie poprzecznej, tzn. większa część mocy wiązki przenoszona jest w większych odległościach od jej osi. Ponieważ wiązka przebiega przez rezonator wiele tysięcy razy, nawet nieznaczne wytłumienie modu powoduje że nie jest on efektywnie wzmacniany. Takie tłumienie można osiągnąć umieszczając



Rys. 3.10. Rozkład gęstości energii w płaszczyźnie poprzecznej dla wiązek Gaussa-Hermite'a o podanych nad wykresami liczbach  $(m, n)$ . Zielone koło reprezentuje aperturę o średnicy  $\pi w$ .



wewnątrz rezonatora przesłonej z aperturą (otworem) o takiej średnicy, by przechodziła przez nią niemal cała moc modu podstawowego, lecz by mody wyższego rzędu doznawały istotnych strat. Rysunek 3.10 przedstawia rozkład gęstości energii dla kilku najniższych modów poprzecznych Gaussa-Hermite'a. Zielone koło reprezentuje aperturę o średnicy  $\pi w$ . Dla tak dobranej apertury mod podstawowy doznaje jedynie 1% strat przy każdym przejściu przez aperturę, podczas gdy już najniższy wyższy mod doznaje strat w wysokości 10%.

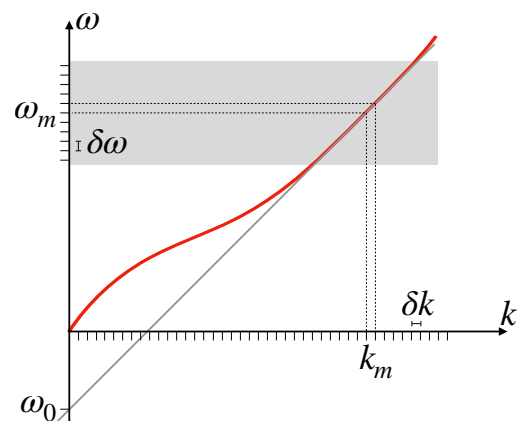
Warunki brzegowe w kierunku wzdłuż rezonatora wymuszają kwantowanie długości fal uwięzionych modów,  $\lambda_m = 2L/m$ . Wynika z tego warunek dla liczby falowej,

$$k_m = m \frac{\pi}{L}.$$

W ośrodku z dyspersją w wąskim przedziale częstości odpowiadającym zakresowi wzmocnienia ośrodka aktywnego częstość jest w przybliżeniu liniową funkcją liczby falowej i jest związana z liczbą falową relacją  $\omega = \omega_0 + v_g k$ , gdzie  $v_g = d\omega/dk$  jest prędkością grupową w tym przedziale częstości (patrz rysunek 3.11). Częstości kolejnych modów dane są więc przez częstości modu,

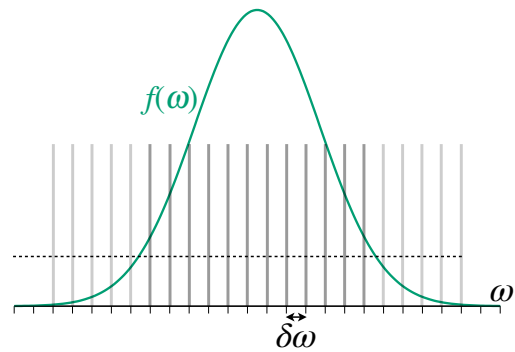
$$\omega_m = \omega_0 + m \frac{\pi v_g}{L} \equiv m \delta\omega,$$

a więc kolejne mody mają częstości odległe o  $\delta\omega = \pi v_g/L$ . Dla typowych długości rezonatorów rzędu kilkudziesięciu centymetrów oraz współczynnika załamania rzędu 1 różnice częstości pomiędzy kolejnymi modami są w zakresie  $10^9 \text{ s}^{-1}$ , co odpowiada energiom rzędu  $\mu\text{eV}$ . Jest to wartość znacznie mniejsza od typowego poszerzenia niejednorodnej linii emisyjnej ośrodka aktywnego. Np. w przypadku laserów na kropkach kwantowych szerokość obwiedni linii emisyjnej,



Rys. 3.11. Mody rezonatora w ośrodku z dyspersją. Czerwona linia reprezentuje przykładową zależność częstości od liczby falowej (krzywą dyspersji) dla ośrodka aktywnego. Szarym prostokątem zaznaczono przedział częstości, w którym aktywny jest ośrodek. Szara prosta jest styczną do krzywej dyspersji w tym obszarze.

Rys. 3.12. Schematyczna reprezentacja obwiedni funkcji wzmocnienia (zielona linia), strat rezonatora (przerwana linia) i częstości modów rezonatora (szare słupki). Ciemnoszare słupki reprezentują mody, dla których wzmocnienie przewyższa straty, więc będzie zachodzić akcja laserowa.



która jest jednocześnie odpowiednią funkcje wzmocnienia, wynosi kilkanaście bądź kilkadziesiąt milielektronowoltów. Oznacza to że w przedziale częstości rzędu szerokości linii widmowej ośrodka aktywnego mieści się zwykle bardzo wiele modułów rezonatora (rysunek 3.12). Mod  $m$  o częstości  $\omega_m$  jest powyżej progu akcji laserowej (czyli daje wkład do wiązki laserowej), jeśli  $R > R_{th,m}$ , gdzie przez  $R_{th,m}$  oznaczyliśmy progową wartość pobudzenia dla danego modu, która zależy od wartości funkcji obwiedni przy częstości modu,  $f(\omega_m)$ , zgodnie z równaniem (3.6). Korzystając z tego równania widzimy, że laserują mody, dla których funkcja obwiedni linii widmowej ośrodka przekracza pewną krytyczną wartość (przy danej intensywności pobudzenia)

$$f(\omega_m) > \frac{\Gamma}{\hbar\omega_m B_{21} R \tau} \equiv f_c$$

(kropkowana linia na rys. 3.12). W warunkach dostatecznie silnego pobudzenia zasadniczo wszystkie mody w przedziale energii wyznaczonym z grubsza szerokością linii widmowej ośrodka aktywnego laserują (ciemniejsze słupki na rys. 3.12). Zobaczmy teraz, że własności emitowanej wiązki zależą od relacji fazowej pomiędzy tymi modami.

Pole elektryczne promieniowania w rezonatorze jest sumą wielu bardzo wąskich linii częstościach  $\omega_m$ . Oznaczmy zespolone amplitudy tych linii przez  $\mathcal{E}_n = |\mathcal{E}_n| e^{i\phi_n}$ . Wartości bezwzględne tych amplitud zależą od wartości funkcji wzmocnienia w częstości  $\omega_n$  i opisane są pewną obwiednią  $g(\omega)$ , o szerokości  $\Delta\omega$  zbliżonej do szerokości obwiedni funkcji wzmocnienia (rysunek 3.13). W domenie częstości łączne pole ma więc postać (dla uproszczenia zapisu pomijamy przestrzenną obwiednię modu)

$$\hat{\mathcal{E}}(\omega) = \sum_m \mathcal{E}_m \delta(\omega - \omega_m),$$

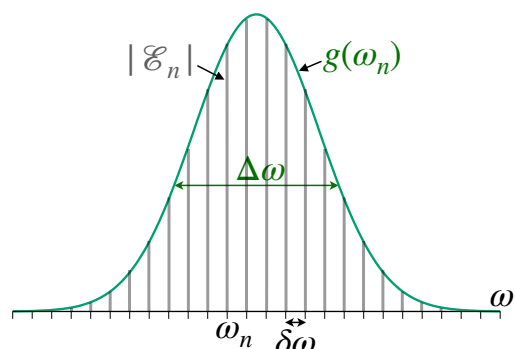
gdzie bardzo wąskie linie przybliżamy deltami Diraca. Pole w domenie czasowej obliczamy jako transformatę Fouriera

$$\mathcal{E}(t) = \int d\omega e^{-i\omega t} \hat{\mathcal{E}}(\omega) = \sum_m \mathcal{E}_m e^{-i\omega_m t}. \quad (3.7)$$

Gęstość energii w rezonatorze ma postać

$$u(t) \propto |\mathcal{E}(t)|^2 = \sum_{m,m'} |\mathcal{E}_m^* \mathcal{E}_{m'}| e^{i(\phi_m - \phi_{m'})} e^{i(\omega_m - \omega_{m'})t}.$$

Rys. 3.13. Schematyczna reprezentacja amplitud kolejnych modów rezonatora (szare słupki) i ich obwiedni (zielona linia).



Jeśli fazy poszczególnych modów są całkowicie losowe, to czynnik fazowy należy zastąpić jego średnią po rozkładzie faz,

$$e^{i(\phi_m - \phi_{m'})} \rightarrow \langle e^{i(\phi_m - \phi_{m'})} \rangle = \delta_{mm'},$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że dla losowej różnicy faz czynnik fazowy uśrednia się do 0, z wyjątkiem przypadku  $m = m'$ , kiedy wynosi on oczywiście 1. Mamy więc

$$u(t) \propto \sum_{m,m'} |\mathcal{E}_m^* \mathcal{E}_{m'}| e^{i(\omega_m - \omega_{m'})t} \delta_{mm'} = \sum_m |\mathcal{E}_m|^2 \quad (\text{losowe fazy modów}),$$

a więc gęstość energii jest stała w czasie i jest po prostu sumą gęstości energii poszczególnych modów. Laser pracuje w sposób ciągły, emitując światło o składzie widmowym odpowiadającym gęstości energii w rezonatorze, a więc złożone z bardzo wielu gęsto rozmieszczonych linii opisanych szeroką obwiednią zbliżoną do obwiedni funkcji wzmocnienia. Taki tryb pracy nazywamy *ciągłym* (często używa się skrótu „cw”, ang. *continuous wave*).

Sytuacja zmienia się diametralnie, jeśli fazy wszystkich modów są zgodne (nazywa się to *trybem synchronizacji modów*, ang. *mode-locking*). Przyjmijmy  $\phi_n = 0$  dla każdego  $n$ . Zaczniemy analizę od krótkich czasów,  $t \ll 1/\delta\omega$ . Wtedy  $e^{i\omega_m t}$  zmienia się nieznacznie pomiędzy kolejnymi częstościami  $\omega_m$ , a więc cały iloczyn  $\mathcal{E}_m e^{i\omega_m t}$  zmienia się wolno z częstością. Sumę w równaniu (3.7) możemy więc zastąpić całką,

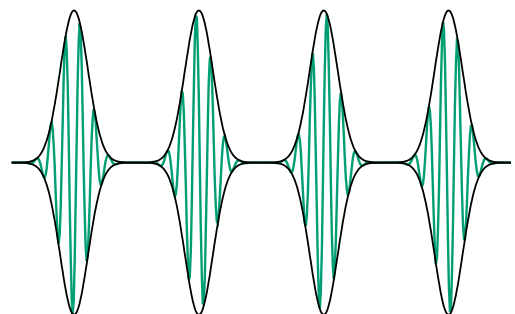
$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{\delta\omega} \int d\omega g(\omega) e^{-i\omega t}.$$

Pole w domenie czasowej ma więc postać impulsu o obwiedni będącej transformatą Fouriera obwiedni amplitud  $g(\omega)$ . Skoro obwiednia amplitud ma szerokość  $\Delta\omega$  w domenie częstości, to z własności transformaty Fouriera wynika, że obwiednia impulsu w domenie czasowej ma szerokość  $\tau_p \approx 1/\Delta\omega$ . Szerokie widmo wzmocnienia daje więc krótki impuls. Zauważmy, że cały impuls mieści się w zakresie stosowalności naszego przybliżenia, bo  $\delta\omega \ll \Delta\omega$ , a więc  $\tau_p \ll 1/\delta\omega$ . Ponieważ jednak w istocie pole jest sumą składowych o równoodległych częstościach, musi ono być okresowe z okresem  $T = 2\pi/\delta\omega$ . Istotnie,

$$\mathcal{E}(t+T) = \sum_m \mathcal{E}_m e^{-i\omega_m(t+T)} = \sum_m \mathcal{E}_m e^{-i\omega_m t} e^{-i\omega_m T} = \sum_m \mathcal{E}_m e^{-i\omega_m t} = e^{-i\omega_0 T} \mathcal{E}(t),$$

bo  $\omega_m T = m\delta\omega T = \omega_0 T + 2\pi m$ , a więc  $e^{-i\omega_m T} = e^{-i\omega_0 T}$ . Widzimy więc, że laser będzie generował impulsy promieniowania o długości  $\tau_p$  powtarzające się periodycznie z okresem  $T$ , choć za każdym kolejnym razem przesunięte w fazie. Stąd równoważne określenie takiego trybu pracy: *tryb impulsowy*.

Pojawiające się przesunięcie fazowe<sup>6</sup> każdego kolejnego impulsu jest bardzo istotną i w wielu zastosowaniach niepożądaną własnością. Oznacza ono, że choć obwiednie impulsów powtarzają się periodycznie, to oscylacje pola w obrębie tych impulsów są przesunięte (rysunek 3.14).



Rys. 3.14. Impulsy lasera pracującego w trybie synchronizacji modów z przesunięciem obwiednia-nośna. Zwróć uwagę na przesunięcie oscylacji pola względem obwiedni kolejnych impulsów.

<sup>6</sup> Dziękuję dr. Maciejowi Kowalczykowi za bardzo pouczające dla mnie dyskusje poświęcone tej kwestii.

Efekt ten nazywa się przesunięciem obwiednia–nośna (ang. *carrier-envelope offset*, CEO). Ma on elegancką interpretację fizyczną: Zauważmy, że okres  $T = 2\pi/\delta\omega = 2L/v_g$  jest czasem przebiegu impulsu światła (paczki falowej) przez rezonator (w dwie strony). Impulsową emisję można więc powiązać z impulsem wędrującym w rezonatorze z prędkością grupową. Jednak fala nośna (oscylacje pola) przemieszczają się z prędkością fazową  $v_f = \omega_{\bar{m}}/k_{\bar{m}}$ , gdzie  $\bar{m}$  odpowiada centralnej częstotliwości impulsu. W ośrodku dyspersyjnym prędkości te są różne. W czasie  $T$  droga przebyta przez falę nośną wynosi

$$v_f T = \lambda \left( \bar{m} + \frac{\omega_0 L}{\pi v_g} \right).$$

Wielkość ta nie jest wielokrotnością długości fali, a więc fala nośna będzie przesunięta, o ile  $\omega_0 L/(\pi v_g)$  nie jest liczbą całkowitą. Zauważmy, że wielkość tę można sprowadzić do liczby całkowitej precyzyjnie regulując długość rezonatora  $L$ . W praktyce, poza omówioną tu stałą składową CEO, w rezonatorze lasera występują fluktuacje, które kompensować trzeba poprzez zaawansowane techniki aktywne. Wiązka laserowa generowana w trybie impulsowym ze skompensowanym przesunięciem obwiednia–nośna (a więc ciąg ściśle identycznych impulsów) nazywa się *grzebieniem częstości*<sup>7</sup> ze względu na fakt, że jej widmo składa się z równoodległych bardzo wąskich linii (rysunek 3.13, z tym że w realnym grzebieniu częstości tych linii jest znacznie więcej).

Aby laser pracował w trybie ciągłym, lecz jednomodowo, potrzebna jest *selekcja modu podłużnego*. Jedną z metod, o bardzo dużej precyzji, jest zastosowanie *etalonu Fabry'ego–Perota*. Jest to przyrząd, w którym wiązka emitowana przez laser odbija się wielokrotnie pomiędzy zwierciadłami, z których jedno ma pewien niewielki, ale niezerowy współczynnik transmisji. Wiązki opuszczające etalon po różnej liczbie odbić interferują konstruktywnie, gdy droga w etalonie (w dwie strony) jest wielokrotnością długości fali; w przeciwnym razie interferencja jest destruktywna. Etalon dokonuje więc selekcji wybranego modu, dla którego zachodzi konstruktywna interferencja.

W tym wykładzie scharakteryzowaliśmy jedynie bardzo podstawowe własności laserów od strony fizycznej i na dość ogólnym poziomie. Fizyka i technika laserów jest bardzo rozbudowaną dziedziną, a szczegółowe podręczniki są łatwo dostępne. Istnieje wiele konstrukcji laserów, które różnią się przede wszystkim rodzajem ośrodka aktywnego. W wielu przypadkach determinuje on uzyskiwane długości fal (tak jak w przykładzie lasera He-Ne omawianego w rozdziale 3.3.1). Szczególne pod tym względem są lasery półprzewodnikowe, które dzięki inżynierii składu, a także geometrii nanostruktur, pozwalają uzyskiwać długości fal w bardzo szerokim zakresie, ale kosztem koherencji otrzymywanej wiązki, która w układach półprzewodnikowych jest ogólnie dość niska. Taka *przestrajalność* jest bardzo ważna w zastosowaniach badawczych. Zastosowanie nieliniowych optycznie kryształów również pozwala uzyskać przestrajalność poprzez procesy konwersji częstości – tym razem kosztem natężenia wiązki.

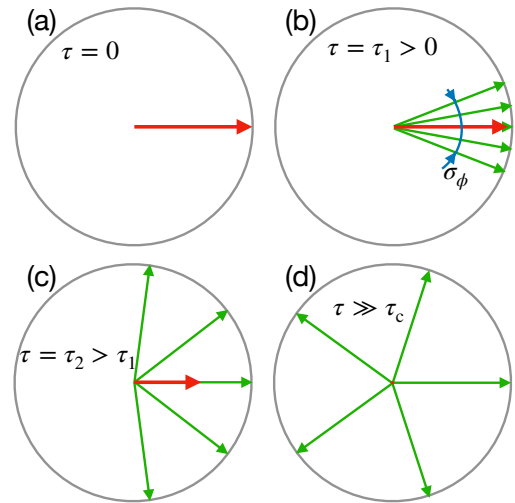
### 3.4. Poszerzenie linii widmowych

W tym podrozdziale pokażemy na kilku prostych (ale ważnych) fizycznych przykładach, że czas zaniku funkcji korelacji pierwszego rzędu związany jest z szerokością linii widmowej. Zbadamy też związek pomiędzy kształtem linii widmowych a przebiegiem czasowym funkcji korelacji.

Na początek wyobraźmy sobie światło w przybliżeniu monochromatyczne, którego częstość fluktuuje,  $\omega(t) = \omega_0 + \tilde{\omega}(t)$ , gdzie  $\omega_0$  jest stałą częstością centralną, a  $\tilde{\omega}(t)$  jest losową fluktuacją o zerowej średniej. Z takim światłem mamy do czynienia np. wtedy, gdy źródło podlega jakimś fluktuującym zaburzeniom z otoczenia (określanym często jako *szum*). Z jednej strony

<sup>7</sup> Jak się wydaje, nomenklatura nie jest ściśle ustalona i jako grzebień częstości określa się czasem wiązkę lasera w trybie impulsowym nawet bez kompensacji CEO, o ile ma ona bardzo szerokie widmo.

Rys. 3.15. Uproszczona ilustracja zaniku koherencji. W przypadku fluktuacji fazy zielone strzałki reprezentują fazę pola (ściślej, wartość  $e^{i\phi}$ ) w różnych powtórzeniach. W przypadku niejednorodnego układu emiterów przedstawiają one w analogiczny sposób fazy różnych emiterów. Reprezentacja jest schematyczna i uwzględnia pięć powtórzeń lub pięć emiterów (w rzeczywistości liczba ta jest oczywiście znacznie większa). Czerwone strzałki reprezentują wartość średnią tych czynników fazowych, proporcjonalną do funkcji korelacji  $g^{(1)}(\tau)$ . (a) Chwila początkowa  $\tau = 0$ . (b,c) Późniejsze chwile czasu. (d) Po czasie znacznie dłuższym od czasu korelacji,  $\tau \gg \tau_c$ .



jest jasne, że takie światło nie jest już ściśle monochromatyczne, a jego widmo jest poszerzone o pewną wielkość  $\delta\tilde{\omega}$ , charakteryzującą amplitudę fluktuacji częstości (można wziąć np. odchylenie standardowe zmiennej  $\tilde{\omega}(t)$ , które nie zależy od czasu, jeśli szum jest stacjonarny). Pole elektryczne w chwili  $t$  ma wtedy postać  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega_0 t} e^{i\phi(t)}$ , gdzie  $\phi(t) = \int_0^t dt' \tilde{\omega}(t')$  jest fazą akumulowaną do chwili  $t$  w wyniku fluktuacji częstości. Fizycznie oznacza to, że w kolejnych powtórzeniach eksperymentu faza pola jest różna. Mamy

$$\mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t+\tau) = \mathcal{E}_0^* \mathcal{E}_0 e^{-i\omega_0 \tau} e^{i[\phi(t+\tau) - \phi(t)]}.$$

Dla stacjonarnego szumu średnia wartość czynnika fazowego nie może zależeć od  $t$ , a więc

$$\langle e^{i[\phi(t+\tau) - \phi(t)]} \rangle = \langle e^{i[\phi(\tau) - \phi(0)]} \rangle = \langle e^{i\phi(\tau)} \rangle.$$

Funkcja korelacji ma więc teraz postać

$$g^{(1)}(\tau) = e^{-i\omega_0 \tau} \langle e^{i\phi(\tau)} \rangle. \quad (3.8)$$

Wartość występującej w tym wzorze średniej z czynnika fazowego przedstawiono na rysunku 3.15. Początkowo ( $\tau = 0$ ) wszystkie fazy wynoszą 0, więc średnia wartość czynnika fazowego równa jest oczywiście 1 (rysunek 3.15(a)). Narastające z czasem rozmycie fazy (którego szerokość  $\sigma_\phi$  schematycznie zaznaczona jest na rysunku 3.15(b)) powoduje, że wartość średnia maleje (rysunek 3.15(b,c)). Gdy rozmycie fazy osiąga wartość rzędu  $2\pi$ , czynniki fazowe są jednorodnie rozłożone na okręgu jednostkowym i średnia wynosi 0, a więc funkcja korelacji całkowicie zanika.

Dokładna wartość średniej oraz jej zależność od czasu zależy od własności statystycznych fluktuacji częstości i zwykle nie jest łatwa do wyliczenia. W najprostszym modelu możemy jednak się spodziewać jakiegoś procesu typu *dyfuzji fazy*: Jeśli  $\tilde{\omega}(t) > 0$ , to faza przesuwa się w prawo, a jeśli  $\tilde{\omega}(t) < 0$  – w lewo, co w efekcie generuje błędzenie losowe w jednym wymiarze. Posiłkując się obrazem standardowej dyfuzji jako wyniku błędzenia losowego<sup>8</sup> oczekujemy więc, że rozkład fazy po czasie  $\tau$  będzie miał wariancję proporcjonalną do  $\tau$  oraz do amplitudy szumu,  $\sigma_\phi^2 = \delta\tilde{\omega}\tau$ . W przypadku zwykłej dyfuzji jest to rozkład Gaussa i taki model wykorzystamy do naszych rozważań. Mamy więc rozkład prawdopodobieństwa dla fazy w chwili  $\tau$ ,

$$f_\tau(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} e^{-\frac{1}{2\sigma_\phi^2}\phi^2},$$

<sup>8</sup> Patrz np. D.S. Simons, *An Introduction to Stochastic Processes in Physics*, rozdz. 3.



Który pozwala nam wyliczyć średnią w równaniu (2.11),

$$\langle e^{i\phi(\tau)} \rangle = \int d\phi e^{i\phi} f_{\tau}(\phi) = e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\phi}} = e^{-\frac{1}{2}\delta\tilde{\omega}\tau}.$$

Oznacza to, że

$$g^{(1)}(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\delta\tilde{\omega}\tau} e^{-i\omega\tau},$$

a więc funkcja korelacji 1. rzędu zanika wykładniczo ze stałą czasową  $\sim 1/\delta\tilde{\omega}$ . Jak widzimy, czas zaniku funkcji korelacji jest odwrotnie proporcjonalny do poszerzenia linii widmowej światła.

Drugim przykładem, który tu rozważymy, jest światło pochodzące od wielu niezależnych emiterów, różniących się częstościami. Z taką sytuacją mamy do czynienia w gazie atomów lub cząstek w skończonej temperaturze, gdzie częstość obserwowanego promieniowania jest przesunięta w stosunku do częstości emisji w wyniku chaotycznego ruchu emiterów (efekt Dopplera). W fizyce półprzewodników często badanym układem jest zespół kropek kwantowych. Są to sztuczne obiekty, których częstości emisji zwykle leżą w dość szerokim przedziale (od kilku do kilkudziesięciu meV) wokół częstości centralnej. W tej dyskusji różnego rodzaju emitery będziemy po prostu nazywali „atomami”. Przyjmijmy, że światło emitowane jest przez każdy atom z taką samą amplitudą i w sposób ciągły. Pole pochodzące od pojedynczego atomu  $i$  ma postać  $\mathcal{E}_j(t) = |\mathcal{E}_0| e^{i\phi_j} e^{-i\omega_j t}$ , gdzie  $\phi_j$  jest fazą promieniowania emitowanego przez  $j$ -ty atom. Pole elektryczne wiązki światła jest sumą pól emitowanych przez poszczególne atomy,

$$\mathcal{E}(t) = \sum_j \mathcal{E}_j(t) = |\mathcal{E}_0| \sum_j e^{i\phi_j} e^{-i\omega_j t}.$$

Stąd nieunormowana funkcja korelacji ma postać

$$\langle \mathcal{E}^*(t) \mathcal{E}(t+\tau) \rangle = |\mathcal{E}_0|^2 \sum_{j,l} e^{i(\omega_l - \omega_j)t} \langle e^{i(\phi_j - \phi_l)} \rangle e^{-i\omega_j \tau},$$

gdzie uśredniamy po fazach. Te fazy dla różnych atomów są niezależne i całkowicie losowe (rozważamy emisję spontaniczną, a nie akcję laserową), więc

$$\langle e^{i(\phi_j - \phi_l)} \rangle = \begin{cases} 1, & j = l \\ \langle e^{i\phi_j} \rangle \langle e^{-i\phi_l} \rangle = 0, & j \neq l \end{cases} = \delta_{jl},$$

gdzie w przypadku  $j \neq l$  pierwsza równość wynika z niezależności faz  $\phi_j$  i  $\phi_l$ , a druga z ich jednorodnego rozkładu na przedziale  $[0, 2\pi)$ . W takim razie

$$\langle \mathcal{E}^*(t) \mathcal{E}(t+\tau) \rangle = |\mathcal{E}_0|^2 \sum_j e^{-i\omega_j \tau},$$

a podstawiając  $\tau = 0$  mamy od razu  $\langle \mathcal{E}^*(t) \mathcal{E}(t) \rangle = N |\mathcal{E}_0|^2$ , gdzie  $N$  jest liczbą atomów. Funkcja korelacji pierwszego rzędu ma więc postać

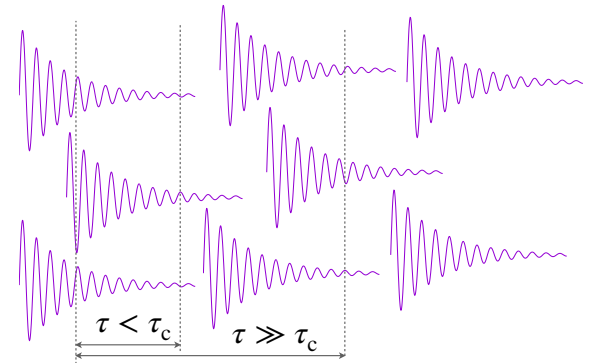
$$g^{(1)}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_j e^{-i\omega_j \tau}.$$

Zauważmy, że ponownie, tak jak w przypadku fluktuacji częstości, mamy do czynienia z sumowaniem czynników fazowych. Sytuację znowu ilustruje więc rysunek 3.15, z tym że interpretacja strzałek jest teraz inna – odnoszą się one do pól emitowanych przez różne atomy. Najważniejsza różnica polega jednak na tym, że teraz fazy nie ulegają dyfuzji, lecz ewoluują deterministycznie ze stałą prędkością:  $\phi_j = \omega_j \tau$ . Jeśli szerokość rozkładu częstości wynosi  $\delta\tilde{\omega}$ , to tym razem szerokość rozkładu faz będzie równa  $\sigma_{\phi} = \delta\tilde{\omega}\tau$ , a więc rośnie liniowo z  $\tau$  (a nie proporcjonalnie do pierwiastka, jak poprzednio).

Jeśli atomów jest bardzo dużo, to można wprowadzić funkcję rozkładu dla ich częstości. Niech więc  $Nf(\omega)d\omega$  będzie liczbą atomów, których częstości leżą w przedziale  $(\omega, \omega + d\omega)$ . Wielkość ta jest bezpośrednio mierzalna, ponieważ liczba atomów jest proporcjonalna do natężenia luminescencji w danym przedziale częstości. Jeżeli szerokość rozkładu częstości  $\delta\omega$  jest znacznie większa od szerokości linii emisyjnej pojedynczego atomu, to funkcja  $f(\omega)$  jest po prostu obwiednią linii emisyjnej zbioru atomów. Jej szerokość nie zależy od własności pojedynczego atomu, lecz od stopnia niejednorodności częstości w zespole atomów, stąd mówimy w takim przypadku o *poszerzeniu niejednorodnym* (ang. *inhomogeneous broadening*). W naszych rachunkach sumę możemy teraz zamienić na całkę,

$$g^{(1)}(\tau) = \int d\omega f(\omega) e^{i\omega\tau}.$$

Jak widać, funkcja korelacji 1. rzędu jest w takim przypadku transformatą Fouriera rozkładu częstości czyli obwiedni linii widmowej niejednorodnie poszerzonego zespołu emiterów. Z podstawowych własności transformaty Fouriera wiemy, że jeśli szerokość rozkładu  $f(\omega)$  wynosi  $\delta\omega$ , to szerokość transformaty Fouriera (a więc czas koherencji) będzie rzędu  $1/\delta\omega$ . Ponadto transformatą Fouriera gaussiana jest gaussian, więc jeśli poszerzenie linii jest Gaussowskie, to zanik funkcji korelacji też jest Gaussowski. Tak jest w przypadku poszerzenia Dopplerowskiego, bo rozkład Maxwella dla prędkości atomów jest gaussianem; w przybliżeniu tak samo opisuje się rozkład energii w zespołach kropek kwantowych.



Rys. 3.16. Światło jako ciąg paczek falowych o czasie trwania  $\tau_c$ .

Trzecim ważnym przypadkiem jest efekt skończonego czasu życia atomu w stanie wzbudzonym. Pobudzony (np. termicznie albo elektrycznie) atom nie promieniuje w sposób ciągły, lecz emituje paczkę fal o amplitudzie zanikającej wykładniczo z czasem  $\tau_{\text{at}}$  równym czasowi życia stanu wzbudzonego (bo emisja trwa oczywiście tyle, ile relaksacja promienista do stanu podstawowego). Ciąg takich paczek fal przedstawia rysunek 3.16. Paczki emitowane po kolejnych wzbudzeniach, a także paczki pochodzące od różnych atomów, mają względem siebie losowe fazy, więc nie dają wkładu do funkcji korelacji. Jeśli badamy autokorelację takiej wiązki dla opóźnień  $\tau < \tau_c$ , to mamy wkład od pól pochodzących z tej samej paczki, a więc funkcja korelacji jest niezerowa. Natomiast dla  $\tau > \tau_c$  pola pochodzą z różnych paczek i funkcja korelacji znika w wyniku uśrednienia po losowych fazach.

Możemy te rozważania ująć ilościowo, przyjmując typowy wykładniczy zanik natężenia pola w paczce. Wypadkowe pole elektryczne fali równe jest  $\mathcal{E}(t) = \sum_j \mathcal{E}_j(t)$ , gdzie pole  $j$ -tej paczki ma postać

$$\mathcal{E}_j(t) = \Theta(t - t_j) |\mathcal{E}_0| e^{i\phi_j} e^{-(t-t_j)\tau_c} e^{-i\omega(t-t_j)},$$

gdzie  $t_j$  jest chwilą początkową danej paczki, a  $\Theta(t)$  jest funkcją Heaviside'a,

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$



Znajdujemy stąd nieunormowaną funkcję korelacji

$$\langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle = |\mathcal{E}_0|^2 \sum_{j'l} \langle e^{i(\phi_l - \phi_j)} \rangle e^{i\omega(t_l - t_j)} e^{-(2t+\tau-t_j-t_l)/\tau_c} \Theta(t-t_j)\Theta(t+\tau-t_l) e^{-i\omega\tau}.$$

Tak jak poprzednio, średnia po całkowicie losowych i niezależnych fazach redukuje się do  $\delta_{jl}$ , a więc

$$\langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle = |\mathcal{E}_0|^2 e^{-i\omega\tau} e^{-\tau/\tau_c} \sum_j e^{-2(t-t_j)/\tau_c} \Theta(t-t_j).$$

Zakładamy tu  $\tau > 0$ , stąd  $\Theta(t-t_j)\Theta(t+\tau-t_j) = \Theta(t-t_j)$ . W ostatnim kroku zauważamy, że jeśli paczek falowych emitowanych w przedziale czasu o długości  $\tau_c$  jest bardzo dużo, to sumę można zastąpić całką. Niech średnia liczba paczek emitowanych w przedziale czasu  $dt'$  wynosi  $\Phi dt'$  (w teorii fotonowej paczka zawiera jeden foton, więc  $\Phi$  jest średnim strumieniem fotonów w wiązce). Wtedy

$$\sum_j \dots = \Phi \int dt' \dots$$

i mamy

$$\langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle = |\mathcal{E}_0|^2 e^{-i\omega\tau} e^{-\tau/\tau_c} \Phi \int_0^t dt' e^{-2(t-t')/\tau_c} = \frac{1}{2} \Phi \tau_c |\mathcal{E}_0|^2 e^{-i\omega\tau} e^{-\tau/\tau_c}.$$

Z powyższego dostajemy natychmiast  $\langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t) \rangle = (1/2)\Phi\tau_c|\mathcal{E}_0|^2$ , a więc funkcja korelacji 1. rzędu ma postać

$$g^{(1)}(\tau) = e^{-i\omega\tau} e^{-\tau/\tau_c}$$

i zanika wykładniczo z czasem korelacji  $\tau_c$ . Z drugiej strony, na mocy własności transformaty Fouriera, kwazi-monochromatyczna paczka fal o długości  $\tau_c$  ma widmo o szerokości  $\delta\omega$  rzędu  $1/\tau_c$ . Ponownie więc poszerzenie linii widmowej jest odwrotnością czasu korelacji.

Związek czasu korelacji z poszerzeniem linii, zilustrowany tu na przykładach, jest uniwersalny. W formalnej teorii pokazuje się, że widmo mocy promieniowania jest proporcjonalne do części rzeczywistej jednostronnej transformaty Fouriera funkcji autokorelacji,

$$S(\omega) = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{i\omega\tau} g^{(1)}(\tau).$$

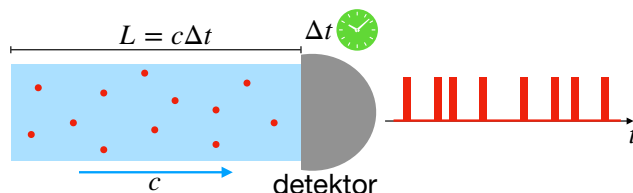
Zajmiemy się teraz badaniem własności wiązek światła w poszukiwaniu cech nieklasycznych. Pierwszą charakterystyką, którą będziemy analizować, jest statystyka liczby zliczeń na detektorze w ustalonym przedziale czasu  $T$ . Jak widzieliśmy w rozdziale 1.4, w klasycznej teorii statystyka ta może być Poissonowska ( $(\Delta n)^2 = \bar{n}$ , co zachodzi dla idealnie monochromatycznej, koherentnej wiązki) bądź nad-Poissonowska ( $(\Delta n)^2 > \bar{n}$ ). Pokażemy, że model kwantowy (fotonowy) dopuszcza również statystyki *pod-Poissonowskie*, tzn. istnieją kwantowe stany światła, w których  $(\Delta n)^2 < \bar{n}$ . Ze względu na to, że żaden detektor nie ma 100-procentowej wydajności kwantowej (czyli nie wykrywa wszystkich fotonów), musimy się też zająć związkiem pomiędzy statystyką liczby fotonów w wiązce, a statystyką zdarzeń detekcyjnych (zliczeń) na detektorze. Statystyka zdarzeń detekcyjnych może być mierzona bezpośrednio, poprzez zliczanie fotonów, ale też pośrednio, poprzez statystyczne własności szumu w prądzie fotodiody. Będziemy więc musieli przeanalizować statystykę szumu fotonprądu, aby zrozumieć tego typu eksperymentalną weryfikację statystyk *sub-Poissonowskich*. Zagadnienia te są treścią poszczególnych podrozdziałów tego rozdziału.

## 4.1.

## Statystyka liczby fotonów

Będziemy rozważać wiązkę światła padającą na detektor (rysunek 4.1). W modelu kwantowym wiązka składa się z fotonów. W tym podrozdziale wyobrażamy sobie, że detektor jest idealny, a więc liczba zliczeń w pewnym przedziale czasu  $T$  równa jest liczbie fotonów padających na detektor. Ponieważ wiązka biegnie z prędkością światła  $c$ , fotony, które padną na detektor, to te znajdujące się w segmencie wiązki o długości  $L = c\Delta t$  przed detektorem. Założenie o idealnym detektorze oznacza więc, że umiemy liczyć fotony w segmencie wiązki. Eksperyment myślowy, który będziemy prowadzić w tym rozdziale, sprowadza się do tego, że wielokrotnie liczymy fotony w ustalonym segmencie wiązki w kolejnych powtórzeniach eksperymentu, budujemy histogram uzyskanych wyników (odzwierciedla on pełną funkcję rozkładu prawdopodobieństwa dla liczby fotonów) oraz obliczamy wartość średnią  $\bar{n}$  i odchylenie standardowe  $\Delta n$  (albo wariancję  $(\Delta n)^2$ ) uzyskanej serii wyników.

Zobaczymy najpierw, że liczba fotonów w segmencie wiązki musi fluktuować (czyli mieć niezerowe odchylenie standardowe) ze względu na samą kwantową naturę światła. Rozważmy dla przykładu wiązkę światła z lasera He-Ne o długości fali 632,828 nm i mocy  $P = 1 \text{ nW} = 6,25 \cdot 10^{12} \text{ eV/s}$ . Energia fotonu o takiej długości fali wynosi  $\hbar\omega = 1,944 \text{ eV}$ . Liczba fotonów w segmencie wiązki o długości  $L = 1 \text{ m}$  wynosi więc  $PL/(\hbar\omega c) = 10,6$ . Jest oczywiste, że taka wartość może być rozumiana jedynie jako wartość średnia, bo liczba fotonów musi być całkowita. Spodziewamy się więc, że w naszym myślowym eksperymencie uzyskamy wyniki całkowite w okolicy wartości 11, ale o pewnej niezerowej wariancji. Widać to jeszcze



Rys. 4.1. Schemat myślowego eksperymentu: zliczanie fotonów przy użyciu idealnego detektora.

wyrażniej w przypadku segmentu wiązki o długości 1 cm. Teraz średnia liczba fotonów wynosi 0,106, więc spodziewamy się, że nie zaobserwujemy żadnego fotonu w większości powtórzeń eksperymentu, czasem zliczymy jeden foton, a bardzo rzadko więcej niż jeden.

Analizę możliwych statystyk liczb fotonów zacznijmy od odtworzenia w modelu kwantowym statystyk klasycznych. Będziemy rozważać wiązki monochromatyczne, tzn złożone z fotonów o ustalonej energii. Rozważmy strumień fotonów, w którym poszczególne fotony rozmieszczone są całkowicie losowo (tzn. z jednorodnym rozkładem prawdopodobieństwa wzdłuż wiązki) i w sposób nieskorelowany (czyli niezależnie od położenia innych fotonów). Zliczenia na idealnym detektorze w przedziale czasu  $\Delta t$  będą więc tworzyły ciąg niezależnych zdarzeń losowych, a więc będą opisane rozkładem Poissona o pewnej średniej  $\bar{n}$  i wariancji  $(\Delta n)^2 = \bar{n}$  (rozdział 1.4). Taki sam będzie rozkład liczby fotonów w segmencie wiązki o długości  $L = c\Delta t$ . Wobec tego strumień nieskorelowanych fotonów o jednorodnym rozkładzie przestrzennym i ustalonej energii jest kwantowym modelem *wiązki koherentnej*.

Można teraz bezpośrednio przenieść wyniki z rozdziału 1.4 i zauważyć, że w przypadku losowych zmian średniej liczby fotonów  $\bar{n}$  (czyli natężenia wiązki) pomiędzy powtórzeniami eksperymentu otrzymamy statystykę nad-Poissonowską. Fizycznie ważniejszym przypadkiem jest jednak światło w stanie równowagi termicznej o temperaturze  $T$ . Rozważamy teraz jeden wybrany mod promieniowania o częstotliwości  $\omega$  (np. w rezonatorze). Odtworzymy pełny rozkład prawdopodobieństwa dla liczby fotonów w tym modzie. Energia modu w stanie z  $n$  fotonami wynosi  $n\hbar\omega$ . Zgodnie z prawem Gibbsa, prawdopodobieństwo takiego stanu równe jest

$$p_n = Z^{-1} e^{-n\beta\hbar\omega}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T},$$

gdzie

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\hbar\omega} = (1 - e^{-\beta\hbar\omega})^{-1}.$$

jest sumą statystyczną (sumowany szereg jest oczywiście bezwzględnie zbieżnym szeregiem geometrycznym). Średnia liczba fotonów wynosi więc

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\beta\hbar\omega}.$$

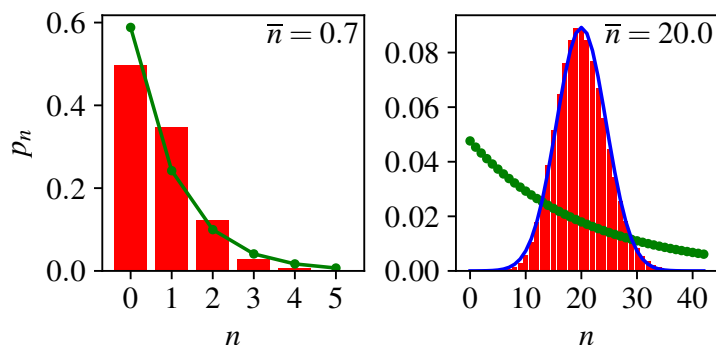
Oznaczmy na moment  $\beta\hbar\omega = x$ . Mamy

$$\bar{n} = Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} = -Z^{-1} \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dx} = (1 - e^{-x}) e^{-x} (1 - e^{-x})^{-2} = \frac{1}{e^x - 1}.$$

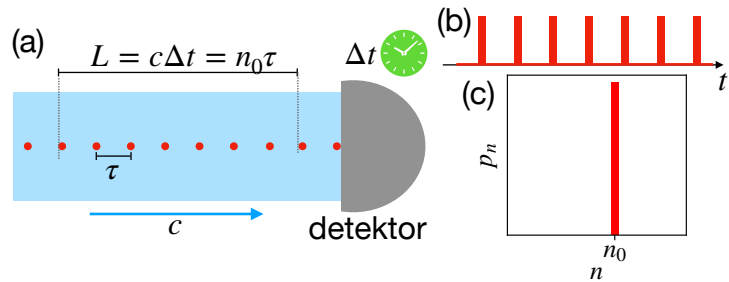
Jest to oczywiście rozkład Plancka

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}.$$

Rys. 4.2. Rozkłady Poissona (słupki), Plancka (zielone linie) oraz Gaussa (niebieska linia) dla średnich wartości liczby fotonów wskazanych na rysunkach. W rozkładzie Gaussa przyjęto wariancję  $\sigma^2 = (\Delta n)^2$ , czyli taką, jaką ma rozkład Poissona o tej wartości średniej.



Rys. 4.3. (a) Wiązka pod-Poissonowska. (b) Sygnał z idealnego detektora. (c) Rozkład prawdopodobieństwa dla liczby fotonów w przedziale zaznaczonym na rysunku (a).



Dla średniego kwadratu liczby fotonów mamy

$$\langle n^2 \rangle = Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-nx} = Z^{-1} \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{2}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{e^x - 1} = 2\bar{n}^2 + \bar{n}.$$

Stąd wariancja liczby fotonów wynosi

$$(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \bar{n}^2 = \bar{n} + \bar{n}^2 > \bar{n}.$$

Widzimy więc, że stan termiczny zawsze ma statystykę nad-Poissonowską. Dwa wyrażenia składające się na wariancję w powyższym równaniu interpretuje się jako wkład kwantowy, związany z fotonową naturą światła ( $\bar{n}$ ) oraz wkład termiczny ( $\bar{n}^2$ ). W odróżnieniu od rozkładu Poissona, który jest skupiony wokół wartości średniej, funkcja rozkładu prawdopodobieństwa dla liczby fotonów w stanie termicznym jest ściśle malejąca. Porównanie tych dwóch rozkładów przedstawia rysunek 4.2, gdzie widzimy również, że dla dużych wartości średniej liczby fotonów rozkład Poissona w pobliżu maksimum jest dobrze przybliżany rozkładem Gaussa o odpowiednio dobranej wariancji.

W klasycznej optyce statystyki Poissonowskie i sub-Poissonowskie wyczerpują wszystkie możliwości. Natomiast w optyce kwantowej łatwo można podać przykład wiązki, dla której statystyka jest *sub-Poissonowska*: Jest to wiązka, w której fotony rozmieszczone są w równych odstępach  $c\tau$ , jak na rysunku 4.3(a) (to jest oczywiście przypadek skrajny). Zliczenia rozłożone będą wtedy w jednakowych odstępach czasu (rysunek 4.3(b)). Jeśli wybierzemy  $\Delta t = n_0 c\tau$ , to każde zliczenie fotonów da wynik  $n_0$ , a więc statystyka zliczeń będzie zgodna z rozkładem prawdopodobieństwa  $p_{n_0} = 1$ ,  $p_n = 0$  dla  $n \neq n_0$ . Taki rozkład ma oczywiście średnią  $\bar{n} = n_0$  i zerową wariancję (rysunek 4.3(c)), a więc z pewnością  $(\Delta n)^2 < \bar{n}$ .

## 4.2. Statystyka fotonów a statystyka zliczeń

Jak pokazaliśmy w poprzednim rozdziale, kwantowa (fotonowa) natura światła wiąże się z fluktuacjami liczby fotonów. Drugim źródłem fluktuacji jest kwantowa natura procesu fotodetekcji: padający na detektor foton wzbudza przejście kwantowe inicjujące proces detekcji (zliczenie) z pewnym prawdopodobieństwem, które w nowoczesnych detektorach może być duże, ale nie jest nigdy równe jedności (prawdopodobieństwo detekcji padającego fotonu nazywamy *wydajnością kwantową* detektora). Kolejnym źródłem losowości są straty w układzie optycznym. W tym rozdziale pokażemy, że istnieje uniwersalny związek pomiędzy statystyką fotonów a statystyką zdarzeń detekcyjnych dla danego poziomu łącznej wydajności układu detekcyjnego (uwzględniającej zarówno straty w układzie, jak i wydajność kwantową samego detektora).

Łatwo zrozumieć, że straty w układzie detekcji prowadzą do statystyki zliczeń, która jest bliższa Poissonowskiej, nawet jeśli statystyka liczby fotonów jest pod-Poissonowska. Jest tak dlatego, że losowa, wybiórcza detekcja niewielkiej części fotonów daje w efekcie ciąg zdarzeń w losowych i nieskorelowanych chwilach czasu, nawet jeśli fotony docierają do detektora w regularnych odstępach. Przeanalizujemy teraz ten efekt ilościowo.

Oznaczmy liczbę fotonów padających na detektor w ustalonym przedziale czasu przez  $n$ , liczbę zliczeń przez  $\nu$ , a wydajność układu detekcyjnego, zdefiniowaną jako prawdopodobieństwo detekcji padającego fotonu, przez  $\eta$ . Zakładamy przy tym, że prawdopodobieństwo detekcji jest stałe i nie zależy od detekcji innych fotonów.

Prawdopodobieństwo warunkowe detekcji  $\nu$  fotonów, jeśli fotonów padających na detektor było  $n$ , równe jest

$$P(\nu|n) = \begin{cases} \binom{n}{\nu} (1-\eta)^{n-\nu} \eta^\nu, & \nu \leq n, \\ 0, & \nu > n, \end{cases}$$

gdzie uwzględniamy fakt, że liczba zliczeń nie może przewyższać liczby fotonów (pomijamy tu tzw. ciemne zliczenia, czyli błędne zdarzenia detekcji). Jest to rozkład dwumianowy, opisujący prawdopodobieństwo  $\nu$  sukcesów w  $n$  próbach<sup>1</sup>, jeśli każda z prób jest niezależna od pozostałych, a prawdopodobieństwo sukcesu w każdej z prób wynosi  $\eta$ . Oczywiście spełniony jest warunek unormowania dla rozkładu dwumianowego,

$$\sum_{\nu=0}^n P(\nu|n) = 1,$$

który wynika ze wzoru dwumianowego Newtona dla  $[\eta + (1-\eta)]^n = 1$ .

Jeśli  $p_n$  jest prawdopodobieństwem, że na detektor padło  $n$  fotonów, to stosując wzór na prawdopodobieństwo całkowite mamy dla całkowitego prawdopodobieństwa  $\nu$  zliczeń

$$P_\nu = \sum_n P(\nu|n) p_n = \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n}{\nu} (1-\eta)^{n-\nu} \eta^\nu p_n.$$

Aby określić statystykę liczby zliczeń, potrzebujemy znać wartość średnią i wariancję tej wielkości. Zaczniemy od obliczenia średniej z  $\nu^2$ ,

$$\langle \nu^2 \rangle = \sum_\nu \nu^2 P_\nu = \sum_\nu [\nu(\nu-1) + \nu] P_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} \nu(\nu-1) \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} (1-\eta)^{n-\nu} \eta^\nu p_n + \bar{\nu}.$$

Druga równość jest tu trywialną tożsamością, a w trzeciej zauważamy, że  $\sum_\nu \nu P_\nu$  jest średnią wartością  $\nu$ . Podwójna suma przebiega po wszystkich parach  $n, \nu$ , dla których  $\nu \leq n$ . Równoważnie można ją zapisać jako sumę po wszystkich  $n$  oraz po  $\nu \leq n$ . Ponadto czynnik  $\nu(\nu-1)$  zeruje się dla  $\nu = 0$  i  $\nu = 1$ , więc sumowanie można rozpocząć od  $\nu = 2$ , a więc również od  $n = 2$ ,

$$\langle \nu^2 \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\nu=2}^n \frac{n!}{(\nu-2)!(n-\nu)!} (1-\eta)^{n-\nu} \eta^\nu p_n + \bar{\nu} = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{\nu'=0}^{n'} \frac{(n'+2)!}{\nu'!(n'-\nu')!} (1-\eta)^{n'-\nu'} \eta^{\nu'+2} p_{n'+2} + \bar{\nu},$$

gdzie w ostatnim kroku wprowadzamy nowe zmienne sumowania:  $n' = n - 2$  oraz  $\nu' = \nu - 2$ . Korzystamy teraz z warunku unormowania rozkładu dwumianowego

$$\sum_{\nu'=0}^{n'} \frac{(n'+2)!}{\nu'!(n'-\nu')!} (1-\eta)^{n'-\nu'} \eta^{\nu'+2} = \eta^2 (n'+2)(n'+1) \sum_{\nu'} P(\nu'|n') = \eta^2 (n'+2)(n'+1),$$

co daje

$$\langle \nu^2 \rangle = \eta^2 \sum_{n'=0}^{\infty} (n'+2)(n'+1) p_{n'+2} + \bar{\nu} = \eta^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) p_n + \bar{\nu} = \eta^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p_n + \bar{\nu},$$

<sup>1</sup> Interpretacja czynników w tej funkcji rozkładu, od prawej do lewej, jest następująca:  $\nu$  sukcesów (prawdopodobieństwa zdarzeń niezależnych się mnożą),  $n - \nu$  porażek oraz liczba sposobów wyboru  $\nu$  zdarzeń spośród  $n$  (pytamy o prawdopodobieństwo sukcesu w *dowolnie wybranych*  $\nu$  przypadkach).

gdzie najpierw wróciliśmy do pierwotnej zmiennej sumowania, a potem rozciągnęliśmy sumowanie od 0, co można zrobić, ponieważ sumowane wyrażenie i tak zeruje się dla  $n = 0$  i  $n = 1$ . Ponieważ

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)p_n = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n)p_n = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle,$$

mamy

$$\langle v^2 \rangle = \eta^2 (\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle) + \bar{v}.$$

Pozostaje nam znaleźć  $\bar{v}$ . Rachunek jest analogiczny do przeprowadzonego powyżej (ale nieco prostszy) i pozostawiamy go jako ćwiczenie. W wyniku otrzymuje się

$$\bar{v} = \eta \bar{n}.$$

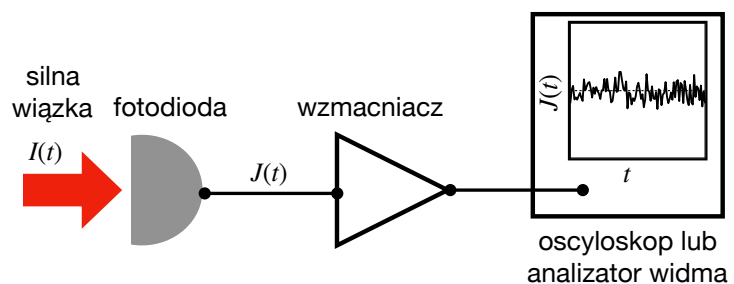
Wynik ten nie jest zaskakujący, bo wobec niezależności zdarzeń detekcyjnych wydajność detekcji musi być równa stosunkowi średniej liczby zliczeń do średniej liczby fotonów,  $\eta = \bar{v} / \bar{n}$ . Łącząc uzyskane wyniki otrzymujemy ostatecznie

$$(\Delta v)^2 = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 = \eta^2 (\Delta n)^2 + \eta(1 - \eta) \langle n \rangle.$$

Ten wynik ma trzy istotne przypadki graniczne. Po pierwsze, jeśli detektor jest idealny,  $\eta = 1$ , to  $(\Delta v)^2 = (\Delta n)^2$ , a ponadto  $\bar{v} = \bar{n}$ , co po prostu oznacza, że statystyka zliczeń wiernie odwzorowuje statystykę liczby fotonów. Natomiast gdy wydajność układu detekcyjnego jest bliska 0,  $\eta \ll 1$ , można pominąć wyrazy rzędu  $\eta^2$  i mamy  $(\Delta v)^2 = \eta \bar{n} = \bar{v}$ , czyli statystyka zliczeń staje się Poissonowska, niezależnie od statystyki liczby fotonów w wiązce. Co prawda, jeśli statystyka fotonów jest pod-Poissonowska, to statystyka zliczeń formalnie też ma taką własność, bo  $(\Delta v)^2 - \bar{v} = \eta^2 [(\Delta n)^2 - \bar{n}]$ , ale różnica pomiędzy wariancją a średnią staje się bardzo mała w przypadku detektora o małej wydajności kwantowej i wykrycie nieklasycyzacji może być niemożliwe ze względu na niepewności pomiarowe. W pierwszej eksperymentalnej demonstracji pod-Poissonowskiej statystyki zliczeń<sup>2</sup> użyto detektorów o wydajności kwantowej rzędu 1%, uzyskując wartość  $Q = [(\Delta v)^2 - \bar{v}] / \bar{v}$  zaledwie rzędu  $-10^{-3}$  (jest to tzw. parametr  $Q$  Mandela, od nazwiska jednego z autorów tego eksperymentu). Na koniec zauważmy, że jeśli statystyka liczby fotonów jest Poissonowska,  $(\Delta n)^2 = \bar{n}$ , to statystyka zliczeń też ma taką własność, niezależnie od wydajności układu detekcji.

### 4.3. Szum śrutowy fotodiody

W poprzednim rozdziale omawialiśmy przejawy kwantowej natury światła na poziomie zliczania pojedynczych fotonów. Kwantowe fluktuacje natężenia wiązki, związane z dyskretną naturą światła, można również obserwować w eksperymentach na silnych wiązках. Schemat takiego eksperymentu przedstawiony jest na rysunku 4.4. W reżimie liniowym prąd fotodiody  $J$  jest proporcjonalny do natężenia padającego światła  $I$ . Fluktuuje on wokół swojej średniej



Rys. 4.4. Schemat pomiaru szumu śrutowego fotodiody. Na podstawie rysunku z książki M. Fox, *Quantum Optics. An Introduction*.

<sup>2</sup> R. Short and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **51**, 384 (1983).



wartości  $\bar{J}$  (zaznaczonej przerywaną linią na rysunku), co określamy jako *szum*. Te fluktuacje zawierają składowe o różnym pochodzeniu. Pokażemy, że jest wśród nich taka, która związana jest z dyskretną naturą prądu. Ponieważ ten rodzaj szumu odzwierciedla ziarnisty charakter strumienia elektronów, określamy go jako *szum śrutowy* (ang. *shot noise*). Jeśli źródłem prądu są zdarzenia detekcji światła, które również ma naturę ziarnistą (fotonową), to statystyka fluktuacji prądu może odzwierciedlać fluktuacje strumienia fotonów.

Będziemy rozważać wartość szumu względem średniej,  $\Delta J = J - \bar{J}$ . Oczywiście  $\langle \Delta J \rangle = 0$ . Miarą natężenia szumu jest jego średni kwadrat  $\langle (\Delta J)^2 \rangle$ . Wyobrażamy sobie pomiar w układzie jak na rysunku 4.5. Zgodnie z prawem Ohma, prąd fotodiody powoduje spadek napięcia na rezystorze  $R_L$ , stąd pojawia się potencjał (względem ziemi) na centralnym węźle obwodu. Stała różnica potencjału nie byłaby obserwowana na wyjściu obwodu (oznaczonym  $V(t)$ ) ponieważ kondensator stanowi przerwę w obwodzie dla napięć stałych. Jednakże fluktuująca część napięcia na rezystorze (proporcjonalna do fluktuacji prądu  $J$ ) generuje fluktuacje potencjału na wyjściu (związane z przeładowywaniem kondensatora). Zauważmy, że

$$\langle J^2 \rangle = \langle (\bar{J} + \Delta J)^2 \rangle = \bar{J}^2 + 2\bar{J}\langle \Delta J \rangle + \langle (\Delta J)^2 \rangle = \bar{J}^2 + \langle (\Delta J)^2 \rangle, \quad (4.1)$$

bo  $\langle \Delta J \rangle = 0$ . Moc wydzielana na rezystorze jest proporcjonalna do  $R_L \langle J^2 \rangle$ , a więc rozdziela się addytywnie na moc średniego prądu  $R_L \bar{J}^2$  i *moc szumu*  $R_L \langle (\Delta J)^2 \rangle$ . Pomiar średniego kwadratu napięcia na wyjściu układu jest więc równoważny pomiarowi mocy szumu. Zwykle jako moc szumu określa się po prostu  $P_N = \langle (\Delta J)^2 \rangle$ , co jest wielkością charakteryzującą sam prąd fotodiody, niezależną od użytego w pomiarze oporu roboczego.

Chcielibyśmy rozłożyć przebieg czasowy szumu na składowe harmoniczne i określić jego *widmową gęstość mocy*, czyli moc niesioną przez składowe widmowe w ustalonym przedziale częstości  $(\omega, \omega + \Delta\omega)$ . Narzucającym się pomysłem jest obliczenie transformaty Fouriera szumu i użycie kwadratu modułu amplitud poszczególnych składowych harmonicznych (Fourierowskich). To się nie uda, ponieważ dla sygnału stacjonarnego (a taki tu rozważamy) transformata Fouriera nie istnieje. Właściwa procedura analizy widmowej stacjonarnych procesów losowych (stochastycznych) opiera się na twierdzeniu Wienera–Chinczyna (ang. *Wiener–Khinchin*), które teraz w uproszczony sposób wyprowadzimy.

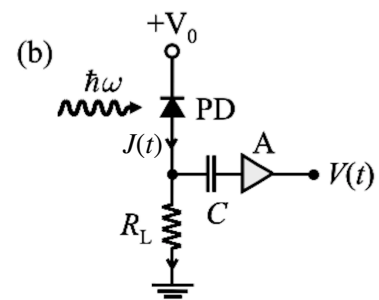
Zaczynamy od obliczenia „obciętej” transformaty Fouriera po skończonym odcinku czasu<sup>3</sup>  $T$  (co ma sens, bo przecież żaden pomiar nie trwa nieskończenie długo),

$$\widehat{\Delta J}_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega t} \Delta J(t). \quad (4.2)$$

(proces jest stacjonarny, więc wybór chwili początkowej nie może mieć znaczenia). Teraz próbujemy zdefiniować widmową gęstość mocy analogicznie do zwykłego podejścia Fourierowskiego, jako

$$\tilde{P}_T(\omega) = \langle \widehat{\Delta J}^*(\omega) \widehat{\Delta J}(\omega) \rangle.$$

Rys. 4.5. Schemat elektryczny układu do pomiaru widma mocy szumu śrutowego fotodiody. PD – fotodioda,  $R_L$  – opór roboczy,  $C$  – kondensator,  $A$  – wzmacniacz. Źródło: M. Fox, *Quantum Optics. An Introduction*.



<sup>3</sup> W tym rozdziale nie pojawi się temperatura, więc użyjemy  $T$  jako oznaczenia czasu.



Potrzebujemy wielkości niezależnej od  $T$  w granicy  $T \rightarrow \infty$ . Tylda sygnalizuje, że to jeszcze niekoniecznie jest taka wielkość. Podstawiamy definicję z równania (4.2) i zmieniamy zmienne  $t' = t + \tau$

$$\begin{aligned}\tilde{P}_T(\omega) &= \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i\omega t} \Delta J(t) \int_{-T/2}^{T/2} dt' e^{i\omega t'} \Delta J(t') \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2-t}^{T/2-t} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \Delta J(t) \Delta J(t+\tau) \rangle.\end{aligned}$$

Kluczową wielkością jest tu funkcja korelacji dla fluktuacji prądu  $C(\tau) = \langle \Delta J(t) \Delta J(t+\tau) \rangle$ . Proces jest stacjonarny, więc zależy ona tylko od  $\tau$ . Funkcja ta wiąże się z funkcją korelacji dla prądu

$$C(\tau) = \left\langle \left[ J(t) - \bar{J} \right] \left[ J(t+\tau) - \bar{J} \right] \right\rangle = \langle J(t) J(t+\tau) \rangle - \bar{J}^2,$$

bo  $\langle J(t) \rangle = \langle J(t+\tau) \rangle = \bar{J}$  na mocy stacjonarności szumu.

Wartości prądu w dostatecznie odległych chwilach czasu muszą być niezależne, więc ta funkcja dąży szybko do 0 dla dużych  $\tau$ . Ponieważ interesuje nas granica bardzo dużych  $T$ , a wkład do wewnętrznej całki pochodzi tylko od wartości  $\tau$  w pobliżu 0, możemy rozciągnąć granice całkowania po  $\tau$  w obie strony do nieskończoności. Wtedy pierwsza całka staje się trywialna i mamy

$$\tilde{P}_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \Delta J(t) \Delta J(t+\tau) \rangle = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \Delta J(t) \Delta J(t+\tau) \rangle.$$

Widzimy, że tak zdefiniowana wielkość jest proporcjonalna do czasu obserwacji. Właściwa definicja widmowej gęstości mocy wymaga więc unormowania czynnikiem  $1/T$ , a ponadto obejmuje wkłady z przeciwnymi częstotściami

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [\tilde{P}_T(\omega) + \tilde{P}_T(-\omega)] = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \Delta J(t) \Delta J(t+\tau) \rangle = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} C(\tau), \quad (4.3)$$

gdzie uzupełniliśmy również definicję o formalną granicę  $T \rightarrow \infty$ , która przy tym unormowaniu jest dobrze określona.

Prąd ma naturę ziarnistą, bo składa się z elektronów. Jeśli przyjąć klasyczny model koherentnej, monochromatycznej wiązki światła, to te elektrony wypływają z fotodiody w losowych i nieskorelowanych chwilach czasu, zgodnie ze złotą regułą Fermiego. Mamy więc do czynienia z ciągiem niezależnych i nieskorelowanych zdarzeń losowych, czyli procesem Poissona, który analizowaliśmy w rozdziale 1.4, gdzie wykazaliśmy, że ma on statystykę Poissonowską. Jak widzieliśmy, dowolna losowa fluktuacja strumienia elektronów w modelu klasycznym spowoduje przejście do statystyki nad-Poissonowskiej. Jeśli jednak przyjmiemy model kwantowy, w którym światło składa się z fotonów, to strumień elektronów wypływający z fotodiody będzie powiązany ze strumieniem padających fotonów. Jeśli wiązka jest koherentna, to same fotony są rozmieszczone w wiązce w sposób losowy i nieskorelowany, a więc statystyka elektronów również nie ma powodu, żeby być inna niż Poissonowska. Gdyby jednak statystyka fotonów była pod-Poissonowska, to statystyka elektronów, a więc statystyka szumu fotodiody, może również mieć charakter pod-Poissonowski.

Na początek zbadajmy funkcję autokorelacji dla procesu Poissona, aby zrozumieć, jakie charakterystyki szumu odpowiadają temu klasycznemu przypadkowi, a jakie mogą dowodzić nieklasycznych własności wiązki. W tym celu dzielimy oś czasu na przedziały o szerokości  $\Delta t$  tak małej, że w każdym z nich można zaobserwować najwyżej jeden elektron. Przedziały te będziemy oznaczać zmienną czasową  $t$ , odpowiadającą np. środkowi przedziału. Liczba elektronów w przedziale  $t$  jest zmienną losową, która może przyjmować wartości  $N_t = 0, 1$ . Średnia wartość tej zmiennej wynosi  $\bar{N}_t = 0P(N_t = 0) + 1P(N_t = 1) = P(N_t = 1)$ . Liczba tych małych przedziałów w pewnym (dużym) przedziale o długości  $T$  równa jest  $n_T = T/\Delta t$ . Średnia liczba elektronów

w przedziale  $T$  równa jest więc  $\overline{N_T} = n_T \overline{N_t} = TP(N_t = 1)/\Delta t$ . Makroskopowy średni prąd równy jest z definicji  $\bar{J} = e\overline{N_T}/T = eP(N_t = 1)/\Delta t$ , gdzie  $e$  jest ładunkiem elementarnym. Stąd zgodność opisu mikroskopowego z makroskopowym wymaga, by

$$P(N_t = 1) = \bar{J}\Delta t/e. \quad (4.4)$$

Prawdopodobieństwo to jest niezależne od  $t$  (co wynika zresztą ze stacjonarności).

Rozważmy teraz dwa różne przedziały  $t$  i  $t + \tau$ ,  $\tau \neq 0$ . Mikroskopowy, chwilowy prąd w tych przedziałach czasu ma wartość  $J(t) = eN_t/\Delta t$  i, odpowiednio,  $J(t + \tau) = eN_{t+\tau}/\Delta t$ . Funkcja korelacji dla prądu ma więc wartość

$$\langle J(t)J(t + \tau) \rangle = \frac{e^2}{(\Delta t)^2} \langle N_t N_{t+\tau} \rangle.$$

Dla wiązki koherentnej  $N_t$  i  $N_{t+\tau}$  są niezależne, więc

$$\langle N_t N_{t+\tau} \rangle = \langle N_t \rangle \langle N_{t+\tau} \rangle = P(N_t = 1)P(N_{t+\tau} = 1) = \frac{(\bar{J}\Delta t)^2}{e^2}.$$

Stąd

$$\langle J(t)J(t + \tau) \rangle = \bar{J}^2, \quad \tau \neq 0.$$

Natomiast dla  $\tau = 0$  mamy

$$\langle J(t)J(t) \rangle = \frac{e^2}{(\Delta t)^2} \langle N_t N_t \rangle$$

oraz

$$\langle N_t N_t \rangle = P(N_t^2 = 1) = P(N_t = 1) = \frac{\bar{J}\Delta t}{e},$$

a więc

$$\langle J(t)J(t) \rangle = \frac{e}{\Delta t} \bar{J}.$$

Funkcja korelacji dla prądu jest więc stała i równa  $\bar{J}^2$  wszędzie poza bardzo wąskim przedziałem o szerokości  $\Delta t$  wokół  $\tau = 0$ , gdzie przyjmuje wartość  $(e/\Delta t)\bar{J}$ . Zauważmy, że całka po tym przedziale równa jest stałej wartości  $e\bar{J}$ . W granicy  $\Delta t \rightarrow 0$  centralna część dąży więc do odpowiednio przeskalowanej delty Diraca w  $\tau = 0$  i mamy

$$\langle J(t)J(t + \tau) \rangle = \bar{J}^2 + e\bar{J}\delta(\tau),$$

a więc

$$\boxed{C(\tau) = e\bar{J}\delta(\tau)} \quad (\text{funkcja korelacji szumu śrutowego}). \quad (4.5)$$

Łatwo znajdujemy widmo mocy szumu śrutowego,

$$\frac{1}{\pi} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} e\bar{J}\delta(\tau) = \frac{1}{\pi} e\bar{J}$$

Jak widać, jest ono stałe. Interpretacja otrzymanej wartości jest taka, że  $P(\omega)\Delta\omega$  jest proporcjonalne do mocy niesionej przez składowe Fourierskie szumu w przedziale  $(\omega, \omega + \Delta\omega)$ . Zwyczajowo zapisuje się to w odniesieniu do częstości  $f = \omega/(2\pi)$ . Podstawiamy w tym celu  $\Delta\omega = \Delta(2\pi f) = 2\pi\Delta f$  i otrzymujemy moc szumu w przedziale częstości  $\Delta f$ ,

$$\boxed{P(f)\Delta f = 2e\bar{J}\Delta f} \quad (\text{widmo mocy szumu śrutowego}). \quad (4.6)$$

Jak widać, widmowa gęstość mocy szumu śrutowego jest proporcjonalna do średniego natężenia prądu.

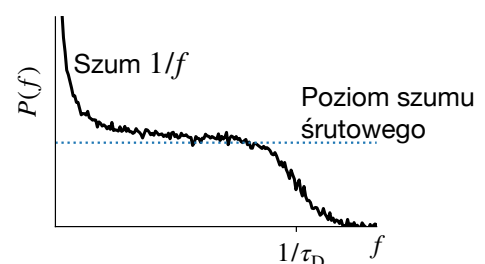
Ten wynik jest dla nas ważny jako punkt odniesienia dla obserwowanych widm mocy szumu. Jak zobaczymy w kolejnym rozdziale, w odpowiednio przeprowadzonym eksperymencie da się wytworzyć światło, dla którego szum prądu fotodetekcji jest poniżej wartości szumu śrutowego. Oznacza to, że wiązka taka charakteryzuje się pod-Poissonowską statystyką liczby fotonów.

## 4.4. Doświadczalna obserwacja statystyk nieklasycznych

W tym rozdziale omówimy przykładowe eksperymentalne realizacje nieklasycznych statystyk fotonów. Zaczniemy od pomiarów szumu fotodiody, a następnie przyjrzymy się dwóm doświadczeniom, w których bezpośrednio badano statystykę zliczeń fotonów.

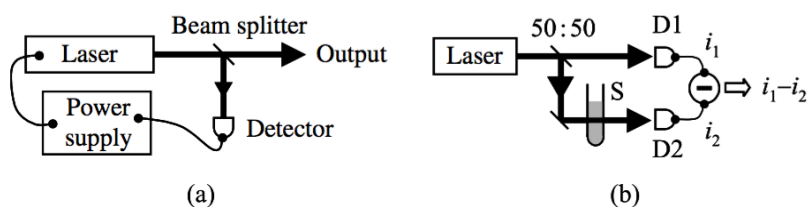
Rysunek 4.6 przedstawia schematycznie widmo mocy szumu detektora w szerokim zakresie częstości, gdyby mierzyć je wprost w układzie przedstawionym na rysunku 4.4 dla światła koherentnego. Po stronie niskich częstości moc szumu narasta. Jest to związane z różnego rodzaju fluktuacjami w układzie eksperymentalnym, np. z drganiami termicznymi zwierciadeł rezonatora laserowego oraz innymi drganiami mechanicznymi w układzie. Ta składowa szumu jest całkowicie klasyczna, a charakteryzuje ją typowo widmowa gęstość mocy odwrotnie proporcjonalna do częstości, stąd powszechnie stosowane określenie „szum  $1/f$ ”. W wyższych częstościach szum  $1/f$  staje się mniej istotny i widmo szumu dąży do przewidzianej teoretycznie stałej wartości, odpowiadającej szumowi śrutowemu. W jeszcze wyższych częstościach mierzona moc szumu maleje, co jest związane z ograniczonym pasmem częstości elektronicznego układu pomiarowego: Jeśli typowy czas reakcji użytego układu detekcji (na który składa się m.in. czas martwy detektora) wynosi  $\tau_D$ , to nie jest możliwa detekcja składowych szumu o częstościach powyżej  $1/\tau_D$ .

Jak już zostało wspomniane powyżej, czas reakcji detektorów skraca się wraz z rozwojem technik pomiarowych. Przy zastosowaniu odpowiednich układów detekcyjnych można też zredukować szum klasyczny. Jednym z możliwych rozwiązań jest aktywna kompensacja szumu przedstawiona na rysunku 4.7(a). W tym układzie wiązka dzielona jest na dzielniku wiązki i jej część kierowana jest do detektora, który steruje źródłem zasilania lasera na zasadzie ujemnego sprzężenia zwrotnego, tzn. redukując moc zasilania, gdy natężenie wiązki jest duże, a zwiększa ją, gdy spada poniżej średniej. Jeśli układ jest dostatecznie szybki, to można w ten sposób wytłumić klasyczne fluktuacje natężenia. Druga metoda ma charakter pasywny i opiera się na zastosowaniu układu zrównoważonej detekcji, przedstawionego na rysunku 4.7(b). Tu również wiązka jest dzielona na dwie części, przy czym ich natężenie jest jednakowe (dzielnik wiązki „50/50”). Obie wiązki kierowane są do detektorów, a następnie elektronicznie uzyskiwana jest różnica sygnałów z detektorów. Jeśli w wiązce występują klasyczne fluktuacje natężenia, to są one dzielone po połowie, a więc w sygnale różnicowym całkowicie się znoszą. Nie można natomiast w ten sposób zredukować szumu kwantowego (śrutowego), bo fotony są niepodzielne i na dzielniku wiązki każdy z nich losowo kierowany jest do jednej albo drugiej wiązki, co nie może zmniejszyć losowości zdarzeń detekcyjnych na detektorach. Na rysunku 4.7(b) układ detekcji zrównoważonej przedstawiony jest w zastosowaniu do pomiaru bardzo nieznacznej absorpcji światła przez próbkę. Gdyby badać bezpośrednio moc wiązki przechodzącej, to jej wytłumienie byłoby bardzo niewielkie w stosunku do początkowego natężenia i mogłoby być niemierzalne na tle szumu. Tymczasem w układzie detekcji zrównoważonej szum (klasyczny) jest skompensowany, a cały sygnał różnicowy pochodzi z różnicy tłumienia pomiędzy dwiema wiązkami (bez próbki sygnał zawierałby jedynie szum śrutowy). Zobaczymy w dalszej części kursu, że detekcja zrównoważona — w nieco bardziej złożonych wersjach — jest kluczowym elementem wielu pomiarów w optyce kwantowej.

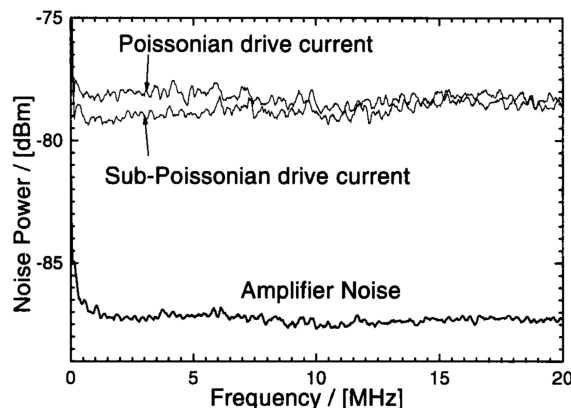


Rys. 4.6. Typowy wynik pomiaru widma mocy szumu detektora.

Rys. 4.7. Redukcja szumu klasycznego  $1/f$ : aktywna (a) i pasywna w układzie detekcji zrównoważonej (b). Źródło: M. Fox, *Quantum Optics. An Introduction*.

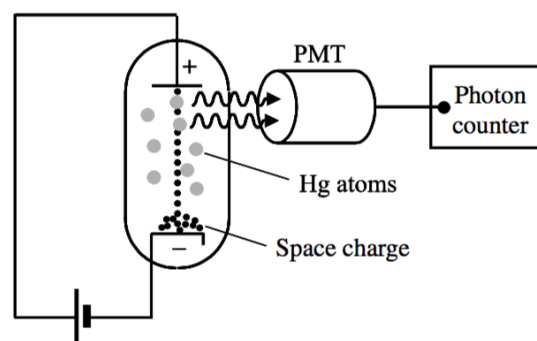


Rys. 4.8. Wynik pomiaru widma mocy szumu detektora dla światła generowanego przez diodę świecącą. Na wykresie porównano poziom szumu dla baterii zasilającej diodę przez rezystor (szum Johnsona) z wynikiem w przypadku zasilania źródłem o Poissonowskiej statystyce prądu. Dolna linia przedstawia poziom szumu samego układu detekcji (bez źródła światła). Źródło: F. Wöfl *et al.*, *J. Mod. Opt.* **45**, 1147 (1998).

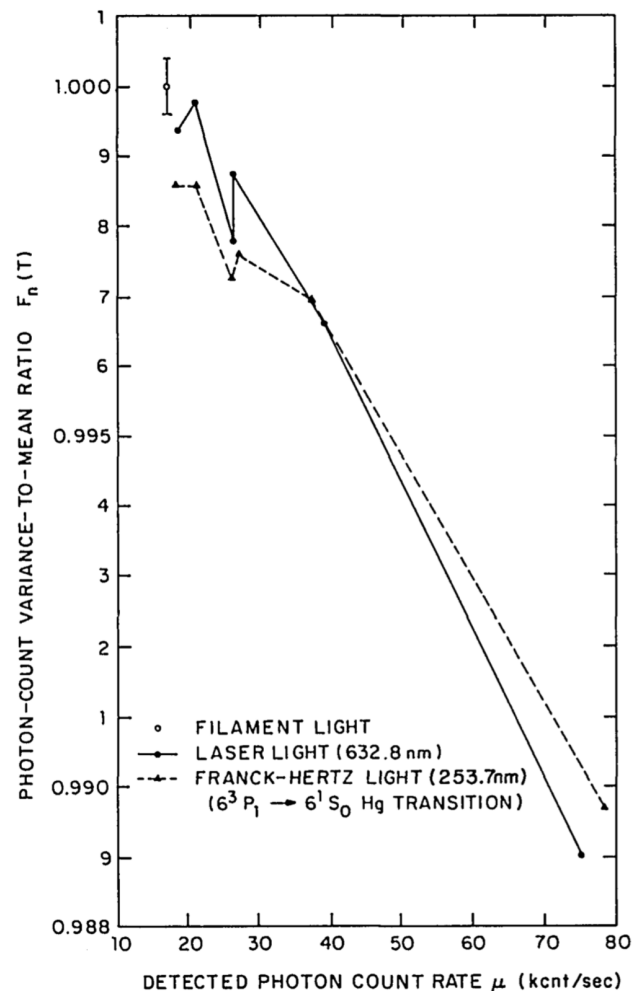


Przykładem wytworzenia i detekcji światła o statystyce pod-Poissonowskiej poprzez pomiar mocy szumu detektora jest eksperyment przedstawiony w pracy F. Wöfl *et al.*, *J. Mod. Opt.* **45**, 1147 (1998). Idea tego eksperymentu (i wielu innych) polega na wykorzystaniu prądu o pod-Poissonowskiej statystyce do pobudzania źródła światła, którego emisja będzie w efekcie miała również charakterystykę pod-Poissonowską. Uzyskanie strumienia elektronów o statystyce pod-Poissonowskiej jest dużo łatwiejsze niż wytworzenie wiązki światła (fotonów) o takiej statystyce, ponieważ elektrony są fermionami, a ponadto odpychają się ze względu na ładunek elektryczny. W omawianym to eksperymencie źródłem prądu była bateria zasilająca diodę świecącą (LED) poprzez rezystor o rezystancji  $R$ . Prąd płynący przez rezystor podlega fluktuacjom termicznym (jest to tzw. *szum Johnsona*), o widmowej gęstości mocy (zdefiniowanej tak jak w powyższych rozważaniach)  $P_J(f) = \langle (\Delta J)^2 \rangle = 4k_B T/R$  (tu  $T$  oznacza temperaturę). Porównanie z gęstością mocy szumu śrutowego,  $P = 2e\bar{J}$ , prowadzi do wniosku, że poziom szumu Johnsona jest poniżej szumu śrutowego, jeśli spadek napięcia na rezystorze jest dostatecznie duży,  $R\bar{J} > 2k_B T/e$ . Wynik eksperymentu przedstawiony jest na rysunku 4.8, gdzie widzimy, że w pewnym przedziale częstości poziom szumu dla układu zasilanego źródłem pod-Poissonowskim jest wyraźnie niższy niż poziom szumu śrutowego (Poissonowskiego). Taki sposób przeprowadzenia doświadczenia i prezentacji wyników jest standardowy: Ponieważ bezwzględna normalizacja wyniku pomiaru jest trudna do przeprowadzenia, standardowo porównuje się wynik dla badanego źródła światła z wynikami pomiarów dokonanych w tym samym układzie dla źródła o statystyce Poissonowskiej, które służą jako poziom odniesienia.

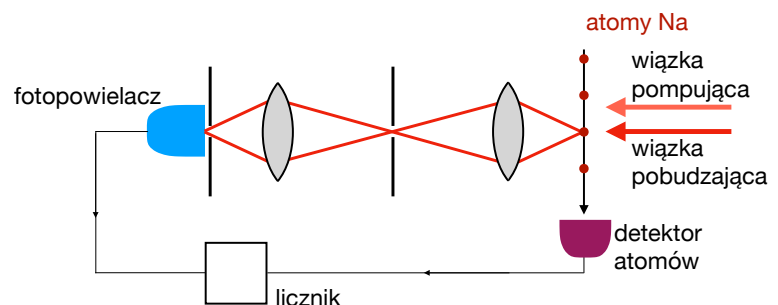
Rys. 4.9. Układ do generacji i detekcji wiązki światła o statystyce pod-Poissonowskiej, wykorzystujący rurę próżniową Francka–Hertza [M. Teich, B. Saleh, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 275 (1985)]. Źródło grafiki: M. Fox, *Quantum Optics. An Introduction*.



Rys. 4.10. Wyniki pomiaru statystyki fotonów eksperymencie Teicha i Saleha. Na wykresie pokazano stosunek wariancji do średniej liczby fotonów dla światła emitowanego wyłącznie przez rozgrzane katodę (puste koło), przez laser (pełne koła połączone ciągłą linią) oraz przez atomy rtęci pobudzone prądem katodowym (trójkąty połączone linią przerywaną). Źródło: M. Teich, B. Saleh, J. Opt. Soc. Am. B 2, 275 (1985).



Rys. 4.11. Uproszczony układ do generacji i detekcji wiązki światła o statystyce pod-Poissonowskiej, wykorzystujący emisję z wiązki atomów sodu [R. Short, L. Mandel, Phys. Rev. Lett. 51, 384 (1983)].



Jako przykład eksperymentu, w którym wykazano pod-Poissonowską statystykę fotonów bezpośrednio poprzez analizę statystyki zliczeń, rozważmy doświadczenie opisane w pracy M. Teich, B. Saleh, J. Opt. Soc. Am. B 2, 275 (1985). Uproszczony schemat układu pomiarowego przedstawiony jest na rysunku 4.9. Źródłem światła była rura próżniowa wypełniona atomami rtęci (rura Francka-Hertza). Atomy pobudzone były do świecenia przez prąd elektronów emitowany termicznie przez rozgrzaną katodę. W warunkach eksperymentu wokół katody wytworzona była chmura elektronów (*ładunek przestrzenny*), która poprzez odpychanie kulombowskie regularyzuje strumień emitowanych elektronów (tzn. zmniejsza jego fluktuacje) na zasadzie ujemnego sprzężenia zwrotnego: Zwiększenie emisji elektronów powoduje wzrost gęstości ładunku przestrzennego, który wytwarza potencjał odpychający dla kolejnych elektronów i w efekcie zmniejsza emisję. W efekcie, przez rurę próżniową płynie strumień elektronów o pod-Poissonowskiej statystyce. Ten pod-Poissonowski prąd pobudza atomy rtęci w wyniku zderzeń elektronów z atomami. Wzbudzony atom relaksuje wypromieniowując foton, dzięki czemu uzyskujemy strumień fotonów, który w jakimś stopniu odtwarza pod-Poissonowską statystykę elektronów. Na wykresie zawierającym wyniki



Tab. 4.1. Wyniki pomiarów w eksperymencie Shorta i Mandela. W kolejnych wierszach zawarto: liczbę powtórzeń, statystykę zliczeń (liczbę powtórzeń, w których zliczono 0,1,2,3 fotony), a także średnią wartość i wariancję liczby zliczeń oraz wartość parametru  $Q$  Mandela. Podano wyniki zmierzone, jak też po korekcie uwzględniającej niedoskonałości układu pomiarowego (m.in. ciemne zliczenia).

	mierzone	po korekcie
$N$	11 025 000	10 927 000
$N(0)$	10 953 136	10 859 079
$N(1)$	71 695	67 797
$N(2)$	168	123
$N(3)$	1	1
$\langle N \rangle$	0,00653	0,00623
$(\Delta N)^2$	0,00652	0,00621
$Q$	-0,00183	-0,00252

porównań (rysunek 4.10) widzimy stosunek wariancji do średniej liczby fotonów dla takiego źródła, oznaczony trójkątami połączonymi liniami przerywanymi, w zależności od średniej liczby zliczeń na sekundę (która zależy od prądu elektronów pobudzających atomy rtęci, a więc od potencjału katody). Podobnie jak w poprzednim eksperymencie, wyniki odniesiono do pomiarów, w których źródłem światła był laser (pełne koła i ciągłe linie). W pewnych warunkach wariancja liczby zliczeń dla światła z rury Francka–Hertza jest poniżej wartości otrzymanej dla światła laserowego, co dowodzi nieklasycznej statystyki badanej wiązki światła. Ten wykres ma pewną interesującą cechę: stosunek wariancji do liczby zliczeń zmniejsza się ze wzrostem liczby zliczeń również dla wiązki laserowej, dla której stosunek ten powinien być przecież stały. Jest to spowodowane czasem martwym detektora i wynikającym z niego ograniczeniem w detekcji fluktuacji dla rosnących liczb zliczeń. Dlatego właśnie wnioski fizyczne wyciągać można jedynie z porównania statystyk dla wiązki badanej i dla wiązki koherentnej, a nie z bezwzględnych wyników pomiaru.

Jako ostatni przykład przeanalizujemy eksperyment z publikacji R. Short, L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **51**, 384 (1983), którego schemat przedstawiony jest na rysunku 4.11. Tu źródłem światła są atomy sodu, które tworzą biegnącą wiązkę na tyle rozrzedzoną, że w istotnym obszarze w danej chwili znajduje się najwyżej jeden atom. Wydajne przejście optyczne w atomach zachodzi pomiędzy dwoma stanami wzbudzonymi, więc atomy są wstępnie pompowane do niższego z tych dwóch stanów, aby następnie pobudzić je do wyższego, gdy znajdą się w ognisku układu optycznego. Po tym pobudzeniu następuje bardzo szybka emisja fotonu, który trafia do fotopowielacza przez układ soczewek i przesłon, którego zadaniem jest zredukować zliczenia fotonów tła. Istotnym elementem układu jest detektor atomów<sup>4</sup> sprzężony z licznikiem detektora. Dzięki temu zliczenia uwzględniane są przez krótki czas jedynie wtedy, gdy w układzie znalazł się atom, co w jeszcze większym stopniu redukuje szum tła. Wyniki pomiaru ilustruje tabela 4.1. Prawdopodobieństwo wielokrotnego pobudzenia atomu jest na tyle małe, że na ponad 11 milionów powtórzeń zaobserwowano jedynie jeden przypadek trzech zliczeń. Obliczone z wyników pomiarów wartości parametru  $Q$  Mandela są ujemne, zarówno w przypadku faktycznych danych pomiarowych, jak i danych skorygowanych o możliwe ciemne zliczenia, co wskazuje na pod-Poissonowski, a więc nieklasyczny, charakter światła emitowanego przez atomy.

<sup>4</sup> Proces detekcji atomów jest tu przedstawiony bardzo schematycznie. Techniczne szczegóły nie są dla nas istotne.

## Interferometria natężeniowa i korelacje fotonowe

Dotąd rozważaliśmy statystykę fotonów w sensie prawdopodobieństwa wystąpienia określonej liczby fotonów w ustalonym segmencie wiązki. Jak widzieliśmy, taką charakterystykę wiązki da się wyznaczyć doświadczalnie, ale statystyczne własności mierzonego sygnału zależą od wydajności układu detekcyjnego, a ta jest ograniczona przede wszystkim wydajnością kwantową detektora.

W praktyce dużo częściej bada się inną statystyczną własność wiązki: korelacje pomiędzy fotonami. Ta charakterystyka jest eksperymentalnie prostsza do wyznaczenia, ponieważ nie zależy od wydajności detektora. Można ją stosować do wiązek o bardzo małym natężeniu, identyfikując źródła pojedynczych fotonów, to znaczy takie, które w dostatecznie krótkim przedziale czasu nie emitują więcej niż jednego fotonu, co można wykorzystać np. w kryptografii kwantowej.

Spróbujmy zrozumieć znaczenie korelacji na prostym przykładzie. Wyobraźmy sobie ludzi chodzących losowo po placu, przy czym w jednym przypadku każda ze spacerujących osób porusza się sama, całkowicie losowo i niezależnie od innych osób, a w drugim przypadku taka sama liczba spacerowiczów przemieszcza się parami. Jeśli wybierzemy pewien dostatecznie duży kawałek placu (ale mniejszy od całego placu), to statystyki liczby spacerowiczów będą w obu przypadkach nieco różne<sup>1</sup>, ale istnieje bardziej istotna i intuicyjnie dość oczywista różnica. Aby ją uchwycić, znajdziemy średnią liczbę osób w pewnym otoczeniu dowolnego, losowo wybranego punktu. W obu przypadkach będzie ona identyczna (proporcjonalna do powierzchni wybranego otoczenia i gęstości osób na placu). A teraz zlokalizujemy dowolną osobę i zapytajmy o średnią liczbę osób *w otoczeniu tej osoby*. W przypadku samotnych spacerowiczów, otrzymamy taką samą liczbę jak poprzednio (niezerową, choć bliską 0 dla małego otoczenia), bo inni spacerowicze rozmieszczeni są zupełnie niezależnie od wybranego. W przypadku par otrzymamy liczbę bliską 1. W pierwszym przypadku nie ma korelacji pomiędzy położeniami osób na placu, a w drugim są one skorelowane. Czytelnik zechce wykonać ten myślowy eksperyment dla placu wypełnionego wojskową defiladą.

Tematem tego rozdziału są podobne korelacje pomiędzy położeniami fotonów w wiązce. Miarą tych korelacji jest prawdopodobieństwo detekcji dwóch fotonów w określonym odstępie czasu (czyli w określonej odległości od siebie wzdłuż osi wiązki), a w szczególności prawdopodobieństwo jednoczesnej detekcji dwóch fotonów (czyli detekcji drugiego fotonu w otoczeniu pierwszego). Ze względu na ograniczoną rozdzielczość czasową tradycyjnych detektorów (czas martwy) badanie jednoczesnych zliczeń przeprowadza się standardowo rozdzielając wiązkę na dwa detektory. Zliczenie odzwierciedlone jest przez sygnał prądowy na wyjściu detektora. Pomiar polega więc na badaniu korelacji pomiędzy prądami na wyjściu dwóch detektorów.

W tym rozdziale najpierw omówimy rozwój interferometrii natężeniowej poczynawszy od interferometrów gwiazdowych. Ma to znaczenie głównie historyczne, ale wydaje się dość pouczające. Następnie zbadamy przewidywania odnośnie wyniku eksperymentu korelacyjnego, które oferuje teoria klasyczna. Dopiero na tej podstawie będziemy w stanie zinterpretować wyniki eksperymentów ze specyficznymi przygotowanymi wiązkami, których nie jest w stanie wyjaśnić teoria klasyczna, a więc dowodzą one kwantowej natury światła.

<sup>1</sup> Oczywiście wynik zliczania w drugim przypadku zawsze wyjdzie parzysty. Wariancja okaże się równa podwojonej średniej.

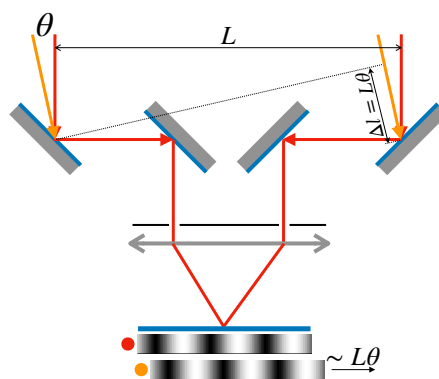


## 5.1. Natężeniowa interferometria gwiazdowa

Gwiazdy są wielkimi obiektami, ale ze względu na bardzo duże oddalenie widzimy je (oczywiście z wyjątkiem Słońca) jako punkty. Ze względu na niezwykle małą średnicę kątową<sup>2</sup> gwiazd i dyfrakcyjne ograniczenia rozdzielczości przyrządów optycznych (a także fluktuacje atmosfery utrudniające obserwacje z Ziemi) nie da się zobrazować gwiazdy jako rozciągniętego obiektu standardowymi metodami optycznymi. Można natomiast wykonać taki pomiar (jak zresztą wiele innych precyzyjnych pomiarów) metodami interferometrycznymi, przy użyciu *interferometrów gwiazdowych*.

Pierwszy taki interferometr zaproponował i zbudował w 1890 roku Albert Michelson<sup>3</sup>, kierując się sugestią Hippolyte'a Fizeau. Schematycznie przedstawia go rysunek 5.1. Jego działanie najłatwiej jest zrozumieć w uproszczonym przypadku pomiaru odległości kątowej pomiędzy dwoma punktowymi źródłami. Czerwone promienie na rysunku reprezentują światło pochodzące z jednego z punktów. Światło pada na dwa lustra, a następnie oba promienie są prowadzone do jednego punktu i interferują. Źródło jest bardzo odległe, więc promienie są praktycznie równoległe. Układ jest więc całkowicie równoważny interferometrowi z dwiema szczelinami, a na ekranie powstaje obraz interferencyjny. Podobnie dzieje się z promieniami pochodzącymi z drugiego źródła (pomarańczowe promienie), z tym że powstający obraz interferencyjny jest przesunięty w stosunku do poprzedniego, bo w wyniku ukośnego padania droga optyczna promienia do prawego lustra jest dłuższa o  $L\theta$ . Przesunięcie jest proporcjonalne do  $L\theta$  i powoduje oscylacje kontrastu łącznego interferogramu, który jest sumą interferogramów pochodzących z dwóch źródeł (dodają się tu *natężenia* światła, bo światło z różnych, bardzo odległych od siebie źródeł nie interferuje): gdy jasny prążek jednego histogramu nakłada się na ciemny prążek drugiego, jasność wypadkowego interferogramu jest wszędzie jednakowa, a więc kontrast spada do zera. Badając kontrast interferogramu w zależności od odległości pomiędzy lustrami  $L$  można wyznaczyć odległość kątową pomiędzy źródłami światła. W przypadku źródeł rozciągniętych zależność kontrastu od  $L$  jest bardziej skomplikowana, ale ogólny schemat pomiaru pozostaje w mocy.

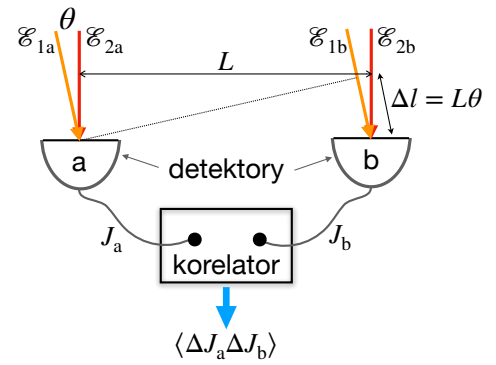
Problem z tego typu interferometrią jest taki, że polega ona na spójności fazowej światła pomiędzy dwoma zwierciadłami. Fluktuacje gęstości atmosfery powodują modulację współczynnika załamania, która z kolei prowadzi do fluktuacji fazy. W przypadku dużych odległości  $L$  ta losowa modulacja staje się różna na drogach promieni do obu zwierciadeł i w efekcie interferogramy zanikają, uniemożliwiając pomiar. Ogranicza to rozdzielczość przyrządu w jego oryginalnej wersji. Niemniej, w 1920 roku udało się zmierzyć średnicę kątową Betelgezy, która jest bardzo jasną i bardzo dużą gwiazdą (czerwonym nadolbrzymem), niezbyt odległą od Ziemi. Zmierzona średnica kątowa wynosi  $0,047''$  czyli  $2,3 \cdot 10^{-7}$  rad (sekunda kątowa to  $1/3600$  stopnia).



Rys. 5.1. Uproszczony schemat interferometru gwiazdowego Michelsona.

<sup>2</sup> Średnica kątowa to kąt pomiędzy liniami poprowadzonymi z punktu obserwacji do przeciwległych punktów na obwodzie gwiazdy.

<sup>3</sup> Urodzony w Strzelnie na Kujawach, wyemigrował z rodzicami do Ameryki jako dziecko.



Rys. 5.2. Uproszczony schemat interferometru gwiazdowego Hanbury'ego-Browna i Twissa.

W związku z ograniczeniami interferometrii gwiazdowej Michelsona, Robert Hanbury Brown i Richard Q. Twiss (HB&T) zaproponowali<sup>4</sup> inną konstrukcję interferometru gwiazdowego, w której chwilowe natężenie sumarycznego promieniowania pochodzącego z odległego rozciągniętego obiektu jest mierzone przez detektory umieszczone w dwóch punktach, a następnie badane są korelacje pomiędzy fluktuacjami prądu z tych dwóch detektorów (rysunek 5.2). Na najogólniejszym poziomie można się spodziewać, że w miarę oddalania od siebie detektorów postać tych korelacji powinna się zmieniać. Okazuje się, że ta zależność korelacji od odległości pomiędzy detektorami niesie informację o średnicy kątowej źródła, podobnie jak w przypadku interferometrii Michelsona. W rzeczywistości interferometr HB&T oparty był na dwóch radioteleskopach i pracował w domenie radiowej, ale nie ma to znaczenia dla naszych rozważań.

Dla uproszczenia znowu rozważymy pomiar odległości kątowej pomiędzy punktowymi źródłami promieniowania, które oznaczymy 1 i 2. Źródła są oczywiście bardzo odległe od detektora, więc wiązki padające na dwa detektory z każdego ze źródeł są praktycznie równoległe. Natomiast wiązki padające na każdy z detektorów z różnych źródeł nadbiegają z kierunków różniących się o bardzo mały kąt  $\theta$ . Zakładamy, że wiązka ze źródła 2 pada na detektory prostopadle, natomiast wiązka ze źródła 1 – pod kątem  $\theta$ . Jak zilustrowano na rysunku 5.2, oznacza to, że pomiędzy wiązkami z tego źródła padającymi na różne detektory pojawia się różnica dróg  $\Delta l = L\theta$ , gdzie  $L$  jest odległością pomiędzy detektorami. Chwilowy prąd z detektora (a) proporcjonalny jest do łącznego natężenia wiązek padających na ten detektor,

$$J_a = (\mathcal{E}_{1a} + \mathcal{E}_{2a})^* (\mathcal{E}_{1a} + \mathcal{E}_{2a}) = \mathcal{E}_{1a}^* \mathcal{E}_{1a} + \mathcal{E}_{2a}^* \mathcal{E}_{2a} + 2 \operatorname{Re} \mathcal{E}_{1a}^* \mathcal{E}_{2a} = J_{1a} + J_{2a} + \Delta J_a,$$

gdzie  $J_{1a}$  i  $J_{2a}$  są natężeniami prądów detektora (a) odpowiadających pojedynczej wiązce 1 lub 2, a  $\Delta J_a = 2 \operatorname{Re} \mathcal{E}_{1a}^* \mathcal{E}_{2a}$  jest fluktuacją prądu wynikającą z interferencji pól. Wiązki 1 i 2 pochodzą z różnych źródeł, więc ich fazy są ustalone jedynie przez bardzo krótki okres czasu rzędu czasu koherencji promieniowania. Taka też będzie skala czasu fluktuacji prądu  $\Delta J_a$ . Warunkiem powodzenia eksperymentu jest dostateczna szybkość elektroniki, tak by te fluktuacje nie zostały uśrednione do zera. Podobnie prąd z detektora (b) jest równy

$$J_b \sim J_{1b} + J_{2b} + \Delta J_b,$$

gdzie  $\Delta J_b = 2 \operatorname{Re} \mathcal{E}_{1b}^* \mathcal{E}_{2b}$ . Korelator dokonuje uśrednienia (po czasie) iloczynu fluktuacji prądów

$$\langle \Delta J_a \Delta J_b \rangle = \langle (\mathcal{E}_{1a}^* \mathcal{E}_{2a} + \mathcal{E}_{1a} \mathcal{E}_{2a}^*) (\mathcal{E}_{1b}^* \mathcal{E}_{2b} + \mathcal{E}_{1b} \mathcal{E}_{2b}^*) \rangle.$$

Założmy, że wszystkie pola mają jednakowe natężenia. W idealnym przypadku  $\mathcal{E}_{2a} = \mathcal{E}_{2b} = |\mathcal{E}_0| e^{i\phi_2}$ , natomiast pomiędzy polami  $\mathcal{E}_{1a}$  a  $\mathcal{E}_{1b}$  występuje przesunięcie fazowe związane z różnicą dróg optycznych: jeśli  $\mathcal{E}_{1a} = |\mathcal{E}_0| e^{i\phi_1}$ , to  $\mathcal{E}_{1b} = |\mathcal{E}_0| e^{i\phi_1} e^{-i\omega L\theta/c}$ . Wobec tego

$$\langle \mathcal{E}_{1a}^* \mathcal{E}_{2a} \mathcal{E}_{1b}^* \mathcal{E}_{2b} \rangle = |\mathcal{E}_0|^4 e^{-i\omega L\theta/c} \langle e^{2i(\phi_2 - \phi_1)} \rangle = 0,$$

<sup>4</sup> R. Hanbury Brown, R. Q. Twiss, *Nature* **178**, 1046 (1956).

bo fazy  $\phi_1$  i  $\phi_2$  są niezależne, ponieważ związane są z polami pochodzącymi z różnych źródeł. Z tego samego powodu

$$\langle \mathcal{E}_{1a} \mathcal{E}_{2a}^* \mathcal{E}_{1b} \mathcal{E}_{2b}^* \rangle = 0.$$

W iloczynie pozostają więc jedynie dwa niezerowe wyrazy

$$\langle \Delta J_a \Delta J_b \rangle = \langle \mathcal{E}_{1a}^* \mathcal{E}_{2a} \mathcal{E}_{1b} \mathcal{E}_{2b}^* \rangle + \text{c.c.} = 2|\mathcal{E}_0|^4 \cos \frac{\omega L \theta}{c}, \quad (5.1)$$

gdzie c.c. oznacza sprzężenie zespolone. Wynik ten oznacza, że funkcja korelacji fluktuacji sygnału z detektorów oscyluje w zależności od odległości pomiędzy detektorami, a okres tych oscylacji zależy od odległości kątowych pomiędzy źródłami promieniowania. Analiza funkcji korelacji pozwala więc wyznaczyć tę odległość. Kluczową cechą tej metody jest jej nieczułość na fluktuacje atmosfery. Taka fluktuacja przesunie fazy pól  $\mathcal{E}_{1a}$  i  $\mathcal{E}_{1b}$  jednakowo, ponieważ wiązki te biegną przez atmosferę po niemal identycznej drodze. Zgodnie z równaniem (5.1) nie wpłynie to na wynik.

W przypadku pomiaru średnicy gwiazd idea eksperymentu jest ta sama, z tym że źródłem promieniowania nie są dwa punkty, lecz dysk. Przejście do tego przypadku jest analogiczne do przejścia od interferencji fal z dwóch punktowych źródeł do dyfrakcji na otworze kołowym. Zamiast prążków interferencyjnych mamy prążki Airy'ego, ale istota pomiaru pozostaje ta sama.

Wadą interferometrii gwiazdowej Hanbury'ego–Brown'a i Twissa jest jej niska czułość wynikająca z tego, że mierzony efekt jest drugiego rzędu w natężeniu promieniowania (czwartego rzędu w polu). Jest to problem fundamentalny, w odróżnieniu od ograniczeń interferometrii Michelsona, które miały charakter techniczny. W efekcie w historycznym rozwoju interferometrii gwiazdowej powstał tylko jeden natężeniowy interferometr gwiazdowy w Narrabri w Australii, który działał w latach 1963–1974 i pozwolił wyznaczyć średnicę kątową Syriusza (0.00594"), a następnie ponad 30 innych gwiazd<sup>5</sup> Ostatecznie, dzięki rozwojowi metod optycznych, powróciła idea interferometrii gwiazdowej typu Michelsona z wykorzystaniem aktywnych układów optyki adaptatywnej, kompensujących fluktuacje atmosfery, a następnie interferometrii VLBI<sup>6</sup> w domenie radiowej.

Jednak historia interferometrii natężeniowej i związanego z nią obszernego działu optyki kwantowej w tym miejscu się dopiero zaczyna. W eksperymencie HB&T na każdy detektor pada jednocześnie światło z *dwóch różnych* źródeł, a więc w języku kwantowym musielibyśmy myśleć o *dwóch różnych* fotonach. Jeden foton (z jednego ze źródeł) faktycznie pada na dwa detektory (analogicznie do dwóch szczelin w interferometrze Younga albo dwóch zwierciadeł w interferometrze gwiazdowym Michelsona), ale nie może dojść do interferencji, bo na detektorze następuje detekcja (pomiar), która niszczy kwantowe superpozycje<sup>7</sup>, a dalej transmitowany jest tylko klasyczny sygnał prądowy. To oznacza, że efekt interferencyjny pochodzi od *dwóch różnych* fotonów. Tymczasem już P. A. M. Dirac — jeden z twórców mechaniki kwantowej, noblista i wielki autorytet fizyczny — napisał: *...each photon then interferes only with itself. Interference between different photons never occurs*<sup>8</sup>. Stąd koncepcja Hanbury'ego Brown'a i Twissa początkowo wzbudziła sprzeciw. Między innymi sugerowano, że przedstawione wyżej rozumowanie to jakiś rodzaj „klasycznego artefaktu”, który zniknie, gdy proces przeanalizuje się formalnie na poziomie kwantowym. W odpowiedzi na te zarzuty Hanbury Brown i Twiss sformułowali w pełni kwantową teorię eksperymentu, która potwierdziła występowanie tego efektu interferencyjnego. Dziś rozumiemy, że istnieje interferencja różnych fotonów (pochodzących z fizycznie niezależnych źródeł) i mamy na to przekonujące dowody eksperymentalne, nawet bardziej bezpośrednie niż eksperyment HB&T. Dirac po prostu się mylił.

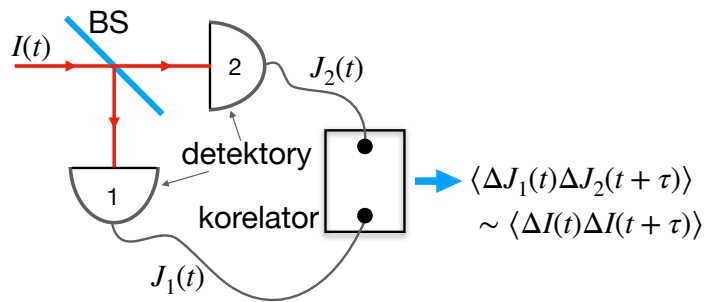
<sup>5</sup> R. Hanbury Brown, J. Davis, L. R. Allen, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. **167**, 121(1974).

<sup>6</sup> Patrz np. [artykuł w Wikipedii](#).

<sup>7</sup> Znakomita dyskusja tego faktu zawarta jest w podręczniku R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Feynmana wykłady z fizyki*, t. 3, rozdz. 3.2 (w wydaniu polskim).

<sup>8</sup> P.A.M. Dirac, *Quantum Mechanics* (Oxford University Press, London, 1958), wyd. 4, str. 9.

Rys. 5.3. Współczesny interferometr Hanbury'ego-Browna i Twissa. BS – dzielnik wiązki 50/50.



W toku dyskusji, których charakter stawał się coraz bardziej fundamentalny, Hanbury Brown i Twiss skonstruowali interferometr laboratoryjny, który pozwalał skupić się na istotnych właściwościach wiązki światła i procesu pomiaru, w oderwaniu od pierwotnego zastosowania w astronomii. Przedstawiony jest on na rysunku 5.3. Mamy tu wiązkę światła pochodzącą z jednego źródła, rozdzielaną na dzielniku wiązki na połowy. Korelator opóźnia sygnał z jednego z wejść i oblicza funkcję autokorelacji dla fluktuacji prądu z pewnym przesunięciem czasowym (opóźnieniem)  $\tau$ . W klasycznym obrazie dzielnik wiązki dzieli ją na dwie identyczne wiązki, których natężenie jest o połowę mniejsze, lecz przebieg fluktuacji jest ten sam. Oba sygnały z detektorów są więc proporcjonalne do natężenia pierwotnej wiązki. W efekcie mierzona jest funkcja autokorelacji fluktuacji natężenia wiązki. Dziś, gdy mówimy o *interferometrze Hanbury'ego Browna i Twissa* zawsze mamy na myśli ten właśnie interferometr.

Interferometria natężeniowa jest ważnym narzędziem badania kwantowych wiązek światła. Fizyczny efekt leżący u jej podstaw na poziomie kwantowym określa się również (częściej po angielsku niż po polsku) jako *interferencję foton-foton* (ang. *photon-photon interference*), w odróżnieniu od interferencji *pole-pole* (ang. *field-field interference*), zachodzącej w standardowych interferometrach klasycznej optyki. Zauważmy, że kluczowa dla opisu tego eksperymentu funkcja korelacji jest drugiego rzędu względem natężenia wiązki, a więc czwartego rzędu względem pola, podczas gdy funkcja korelacji opisująca standardowe eksperymenty interferencyjne jest drugiego rzędu względem pola, a więc liniowa w natężeniu wiązki. Przyjęto określać rząd efektu interferencyjnego oraz opisującej go funkcji korelacji w stosunku do natężenia wiązki, a więc w eksperymencie HB&T mierzona jest *funkcja autokorelacji drugiego rzędu* (zdefiniujemy ją formalnie poniżej). Mówimy o *autokorelacji*, ponieważ interesuje nas korelacja pomiędzy wartościami *tego samego* sygnału w różnych chwilach czasu.

## 5.2. Funkcja korelacji 2. rzędu — opis klasyczny

W tym rozdziale podamy formalną definicję funkcji autokorelacji drugiego rzędu i przeanalizujemy tę funkcję w modelu klasycznym. Zbadamy jej wartości asymptotyczne (dla dużych opóźnień) i wyprowadzimy ważne nierówności, których złamanie będzie dowodem nieklasyczności pola.

Funkcja autokorelacji mierzona w układzie przedstawionym na rysunku 5.3 jest średnią z iloczynu fluktuacji natężenia wiązki. Fluktuacja jest zdefiniowana przez rozkład chwilowego natężenia wiązki na wartość średnią i fluktuację,

$$I(t) = \bar{I}(t) + \Delta I(t). \quad (5.2)$$

Z tej definicji natychmiast wynika, że  $\langle \Delta I(t) \rangle = 0$ . Przypomnijmy, że średnie w klasycznym opisie odnoszą się do zespołu statystycznego, realizowanego fizycznie przez wielokrotne powtarzanie pomiaru w identycznych warunkach (nie są to średnie po czasie).

Na początek znajdziemy związek pomiędzy funkcjami autokorelacji dla natężenia wiązki i dla fluktuacji natężenia wiązki.

$$\begin{aligned}\langle I(t)I(t+\tau) \rangle &= \left\langle \left( \bar{I}(t) + \Delta I(t) \right) \left( \bar{I}(t+\tau) + \Delta I(t+\tau) \right) \right\rangle \\ &= \bar{I}(t)\bar{I}(t+\tau) + \bar{I}(t)\langle \Delta I(t+\tau) \rangle + \bar{I}(t+\tau)\langle \Delta I(t) \rangle + \langle \Delta I(t)\Delta I(t+\tau) \rangle \\ &= \bar{I}(t)\bar{I}(t+\tau) + \langle \Delta I(t)\Delta I(t+\tau) \rangle,\end{aligned}\quad (5.3)$$

bo  $\langle \Delta I(t) \rangle = \langle \Delta I(t+\tau) \rangle = 0$ .

Fluktuacje w bardzo odległych chwilach czasu powinny być od siebie niezależne, a średnia z iloczynu zmiennych niezależnych równa jest iloczynowi średnich. Stąd dla czasów opóźnienia  $\tau$  znacznie dłuższych od pewnego charakterystycznego czasu korelacji  $\tau_c$  mamy

$$\langle \Delta I(t)\Delta I(t+\tau) \rangle = \langle \Delta I(t) \rangle \langle \Delta I(t+\tau) \rangle = 0, \quad \tau \gg \tau_c,$$

stąd, na mocy równania (5.3),

$$\langle I(t)I(t+\tau) \rangle \xrightarrow{\tau \gg \tau_c} \bar{I}(t)\bar{I}(t+\tau).\quad (5.4)$$

Natomiast dla  $\tau \rightarrow 0$  mamy

$$\langle \Delta I(t)\Delta I(t+\tau) \rangle \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \langle [\Delta I(t)]^2 \rangle \geq 0,$$

przy czym równość zachodzi jedynie wtedy, gdy nie występują żadne fluktuacje.

Unormowaną funkcję autokorelacji drugiego rzędu  $g^{(2)}(t, t+\tau)$  definiujemy poprzez unormowanie funkcji autokorelacji dla natężenia wiązki,

$$g^{(2)}(t, t+\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\bar{I}(t)\bar{I}(t+\tau)} = \frac{\langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}^*(t+\tau)\mathcal{E}(t+\tau)\mathcal{E}(t) \rangle}{\langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t) \rangle \langle \mathcal{E}^*(t+\tau)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle}.$$

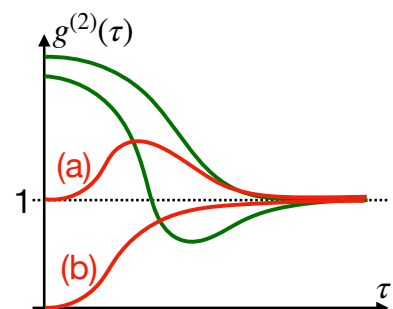
Zwykle nazywa się tę funkcję po prostu „funkcją korelacji drugiego rzędu”. Dzięki unormowaniu nie zależy ona od natężenia wiązki, a jedynie od jej statystycznych własności. Biorąc pod uwagę relację (5.4), funkcja  $g^{(2)}$  ma asymptotyczną wartość

$$g^{(2)}(t, t+\tau) \xrightarrow{\tau \gg \tau_c} 1.$$

W przypadku pól stacjonarnych funkcja korelacji zależy jedynie od różnicy argumentów czasowych, czyli od  $\tau$ . Można ją wtedy zapisać w postaci

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\bar{I}^2},$$

gdzie licznik nie zależy od  $t$ , a w mianowniku korzystamy z warunku stacjonarności i podstawiamy  $\bar{I}(t+\tau) = \bar{I}(t) \equiv \bar{I}$ .



Rys. 5.4. Przykładowe przebiegi funkcji  $g^{(2)}(\tau)$  (dla pola stacjonarnego) dozwolone (zielone) i niedozwolone (czerwone) w teorii klasycznej. W przypadku (a)  $g(\tau) > g(0)$ ; w przypadku (b) również  $g(\tau) > g(0)$ , a ponadto  $g(0) < 1$ .



Wykażemy teraz dwie nierówności, które muszą być spełnione dla światła opisanego klasycznym modelem fluktuacji. Pierwsza wynika wprost z równania (5.3) dla  $\tau = 0$ . Ponieważ  $\langle [\Delta I(t)]^2 \rangle \geq 0$ , mamy

$$g^{(2)}(t, t) \geq 1. \quad (5.5)$$

Drugą nierówność wyprowadzamy z oczywistej relacji

$$\left\langle \left[ \frac{I(t)}{\bar{I}(t)} - \frac{I(t+\tau)}{\bar{I}(t+\tau)} \right]^2 \right\rangle \geq 0.$$

Rozpisując kwadrat dostajemy

$$\frac{\langle I^2(t) \rangle}{\bar{I}^2(t)} + \frac{\langle I^2(t+\tau) \rangle}{\bar{I}^2(t+\tau)} - 2 \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\bar{I}(t)\bar{I}(t+\tau)} \geq 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{2} \left[ \frac{\langle I^2(t) \rangle}{\bar{I}^2(t)} + \frac{\langle I^2(t+\tau) \rangle}{\bar{I}^2(t+\tau)} \right] \geq \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\bar{I}(t)\bar{I}(t+\tau)}$$

W wyrażeniach występujących w tej nierówności rozpoznajemy funkcje korelacji drugiego rzędu,

$$\frac{1}{2} [g^{(2)}(t, t) + g^{(2)}(t+\tau, t+\tau)] \geq g^{(2)}(t, t+\tau) \quad (5.6)$$

Dla pola stacjonarnego mamy w szczególności

$$g^{(2)}(0) \geq g^{(2)}(\tau) \quad \text{dla dowolnego } \tau \quad (\text{światło stacjonarne}). \quad (5.7)$$

Klasyczna teoria fluktuacji wiązki przewiduje więc, że w przypadku stacjonarnym unormowana funkcja autokorelacji drugiego rzędu dla dowolnego opóźnienia nie może być mniejsza niż dla opóźnienia  $\tau = 0$ .

Przykładowe przebiegi funkcji autokorelacji drugiego rzędu dozwolone i zabronione w modelu klasycznym przedstawione są na rysunku 5.4. Zobaczmy w kolejnym rozdziale, że fotonowy (kwantowy) model światła dopuszcza łamanie klasycznych nierówności dla funkcji autokorelacji.

### 5.3. Funkcja korelacji 2. rzędu — opis kwantowy

W tym rozdziale omówimy fotonowy model funkcji autokorelacji drugiego rzędu. Jest to opis kwantowy, choć sformułowany w sposób fenomenologiczny, bez angażowania formalizmu (proste elementy formalizmu kwantowego dla tego zagadnienia zostaną wprowadzone w dalszych rozdziałach).

Aby przejść do opisu opartego na modelu fotonowym musimy przede wszystkim zdefiniować eksperyment równoważny pod względem fizycznym pomiarowi funkcji autokorelacji dla fluktuacji prądu detektora, lecz przeprowadzany w reżimie detekcji pojedynczych fotonów, kiedy detektor generuje impuls prądowy w przypadku detekcji. Podobnie jak w rozdziale 4.3, podzielimy oś czasu na małe przedziały, w których może mieć miejsce detekcja co najwyżej jednego fotonu. Oznaczmy te przedziały wartościami czasu  $t$  (np. wartością w środku przedziału; nie ma to znaczenia). Prąd z detektora  $i$  ( $i = 1, 2$ ) równy jest  $J_i(t) = J_0$  w odcinkach czasu, w których nastąpiło zdarzenie detekcyjne, czyli wtedy, gdy  $v_i(t) = 1$ , i  $J_i = 0$  w pozostałych odcinkach czasu, w których  $v_i(t) = 0$ . Średni prąd detektora  $i$  w chwili  $t$  równy jest  $\bar{J}_i(t) = J_0 p[v_i(t) = 1]$ , gdzie  $p[v_i(t) = 1]$  jest prawdopodobieństwem rejestracji zliczenia na detektorze  $i$  w przedziale czasu wokół  $t$  (dopuszczamy możliwość niestacjonarności, czyli zależności tych prawdopodobieństw od czasu). Mamy tu ponownie do czynienia ze zmienną losową zero-jedynkową, dla której wartość średnia równa jest prawdopodobieństwu wystąpienia wartości 1,  $\langle v_i(t) \rangle = p[v_i(t) = 1]$ , stąd

$$\bar{J}_i(t) = J_0 \langle v_i(t) \rangle$$

Iloczyn prądu detektora 1 w przedziale  $t$  i prądu detektora 2 w przedziale  $t + \tau$  przyjmuje wartość  $J_1(t)J_2(t + \tau) = J_0^2$  gdy w tych chwilach czasu nastąpią zliczenia na obu detektorach, co zachodzi z prawdopodobieństwem  $p[v_1 = 1 \wedge v_2 = 1]$ , oraz  $J_1(t)J_2(t + \tau) = 0$  w pozostałych przypadkach — gdy w ustalonych przedziałach czasu „kliknie” tylko jeden detektor albo żaden. W takim razie z elementarnego rachunku prawdopodobieństwa otrzymujemy

$$\langle J_1(t)J_2(t + \tau) \rangle = J_0^2 p[v_1 = 1 \wedge v_2 = 1].$$

Rozważmy teraz zmienną losową  $v_1(t)v_2(t + \tau)$ . Jest ona oczywiście zero-jedynkowa i

$$\langle v_1(t)v_2(t + \tau) \rangle = p[v_1 = 1 \wedge v_2 = 1].$$

Zestawiając dwa ostatnie wyniki widzimy, że

$$\langle J_1(t)J_2(t + \tau) \rangle = J_0^2 \langle v_1(t)v_2(t + \tau) \rangle.$$

Normując we właściwy sposób znajdujemy unormowaną funkcję korelacji dla prądów detektorów

$$\frac{\langle J_1(t)J_2(t + \tau) \rangle}{\bar{J}_1(t)\bar{J}_2(t + \tau)} = \frac{\langle v_1(t)v_2(t + \tau) \rangle}{\langle v_1(t) \rangle \langle v_2(t + \tau) \rangle}. \quad (5.8)$$

Jest to wielkość bezpośrednio mierzona w tym eksperymencie. Zauważmy, że wartość prądu odpowiadającego zliczeniu nie ma znaczenia (w efekcie unormowania).

W ten sposób powiązaliśmy unormowaną funkcję korelacji prądów z detektorów ze statystyką zliczeń. Pozostaje nam odnieść statystykę zliczeń do statystyki korelacji fotonów w wiązce. Zakładamy, że nasze przedziały czasu są wystarczająco krótkie by również liczba fotonów w wiązce w jednym przedziale była równa najwyżej 1. Niech wydajność detekcji wynosi  $\eta$ . Ponieważ fotony są losowo i z równymi prawdopodobieństwami wysyłane do detektora 1 lub 2, średnia liczba zliczeń na każdym z detektorów jest związana ze średnią liczbą fotonów  $\langle n \rangle$  relacją

$$\langle v_1(t) \rangle = \langle v_2(t) \rangle = \frac{1}{2} \eta \langle n(t) \rangle. \quad (5.9)$$

Natomiast zliczenie na detektorach 1 i 2 w ustalonych chwilach czasu  $t$  i  $t + \tau$  wymaga jednoczesnego spełnienia warunków:

- fotony w wiązce w chwilach  $t$  i  $t + \tau$  – prawdopodobieństwo  $p[n(t) = 1 \wedge n(t + \tau) = 1]$ ;
- foton w chwili  $t$  skierowany do detektora 1 – prawdopodobieństwo  $1/2$ ;
- foton w chwili  $t + \tau$  skierowany do detektora 2 – prawdopodobieństwo  $1/2$ ;
- foton w chwili  $t$  spowodował zdarzenie detekcyjne – prawdopodobieństwo  $\eta$ ;
- foton w chwili  $t + \tau$  spowodował zdarzenie detekcyjne – prawdopodobieństwo  $\eta$ .

Mnożąc te prawdopodobieństwa dostajemy

$$\langle v_1(t)v_2(t + \tau) \rangle = p[v_1 = 1 \wedge v_2 = 1] = \frac{1}{4} \eta^2 p[n(t) = 1 \wedge n(t + \tau) = 1] = \frac{1}{4} \eta^2 \langle n(t)n(t + \tau) \rangle, \quad (5.10)$$

bo zmienna  $n(t)n(t + \tau)$  jest również zero-jedynkowa. Podstawiając równania (5.9) i (5.10) do równania (5.8) otrzymujemy związek pomiędzy unormowaną funkcją autokorelacji mierzonego sygnału z detektorów a statystyką korelacji fotonów,

$$\frac{\langle J_1(t)J_2(t + \tau) \rangle}{\bar{J}_1(t)\bar{J}_2(t + \tau)} = \frac{\langle n(t)n(t + \tau) \rangle}{\langle n(t) \rangle \langle n(t + \tau) \rangle}.$$

Kwantową wersją funkcji korelacji drugiego rzędu, która teoretycznie opisuje wyniki omawianego eksperymentu w reżimie pojedynczych fotonów jest więc

$$g^{(2)}(t, t + \tau) = \frac{\langle n(t)n(t + \tau) \rangle}{\langle n(t) \rangle \langle n(t + \tau) \rangle}. \quad (5.11)$$



W szczególności w przypadku stacjonarnym

$$g^{(2)}(t, t + \tau) = g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle n(t)n(t + \tau) \rangle}{\langle n(t) \rangle^2} \quad (\text{kwantowa funkcja korelacji 2. rzędu: pole stacjonarne}), \quad (5.12)$$

gdzie  $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle$  zależy tylko do  $\tau$ .

Powyższe definicje, do których doszliśmy na drodze fenomenologicznej, pozostają niezmienniczo w formalnej teorii, z tym że za wielkości  $n(t)$  należy podstawić odpowiednie operatory (obserwable), a średnie trzeba interpretować w sensie kwantowym. Na razie pozostaniemy przy wersji fenomenologicznej.

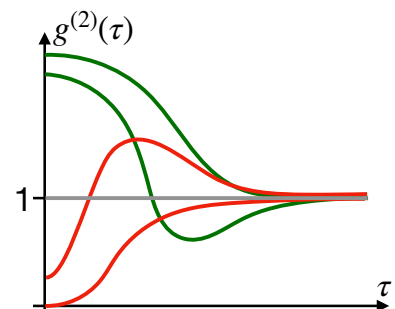
Aby uzyskać fizyczną interpretację kwantowej funkcji  $g^{(2)}$ , wróćmy jeszcze na moment do prawdopodobieństw. Zauważmy, że funkcja ta wyraża się przez prawdopodobieństwo warunkowe,

$$g^{(2)}(t, t + \tau) = \frac{1}{p[n(t + \tau) = 1]} \frac{p[n(t) = 1 \wedge n(t + \tau) = 1]}{p[n(t) = 1]} = \frac{p[n(t + \tau) = 1 | n(t) = 1]}{p[n(t + \tau) = 1]}.$$

Jest ona więc równa stosunkowi prawdopodobieństwa warunkowego wystąpienia fotonu w chwili  $t + \tau$ , jeśli wiemy, że w chwili  $t$  był foton, do bezwarunkowego prawdopodobieństwa wystąpienia fotonu w chwili  $t + \tau$ .

Po pierwsze, pozwala nam to znaleźć asymptotykę dla dużych czasów opóźnień  $\tau$ . Jeśli  $\tau$  jest duże ( $\tau \gg \tau_c$ ), to pojawienie się fotonu w  $t$  nie powinno wpływać na prawdopodobieństwo pojawienia się innego fotonu w  $t + \tau$ , a więc prawdopodobieństwa warunkowe i bezwarunkowe są jednakowe i  $g^{(2)}(\tau) \rightarrow 1$ , tak jak w modelu klasycznym. Równoważnie,  $n(t)$  i  $n(t + \tau)$  stają się niezależne, stąd  $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle = \langle n(t) \rangle \langle n(t + \tau) \rangle$ , co prowadzi do tej samej konkluzji.

Po drugie, widzimy, że funkcja korelacji zawiera informację o wpływie faktu pojawienia się fotonu w  $t$  na prawdopodobieństwo pojawienia się fotonu w  $t + \tau$ . Jeśli  $g^{(2)}(t, t + \tau) > 1$ , to prawdopodobieństwo to wzrasta (w porównaniu z prawdopodobieństwem bezwarunkowym), a jeśli  $g^{(2)}(t, t + \tau) < 1$  — maleje. W przypadku wiązki koherentnej położenia fotonów są z definicji niezależne, więc  $g^{(2)}(t, t + \tau) = 1$  dla każdego  $\tau$ . Szczególne znaczenie ma wartość  $g^{(2)}(t, t)$  albo  $g^{(2)}(0)$  w przypadku wiązki stacjonarnej. Jeśli  $g^{(2)}(t, t) > 1$ , to prawdopodobieństwo detekcji fotonu rośnie, jeśli w tej samej chwili nastąpiła detekcja innego fotonu. Mówimy, że fotony w wiązce są *zgrupowane* (ang. *bunched*). W interferometrze HB&T pojawi się nadwyżka jednoczesnych zdarzeń detekcyjnych na dwóch detektorach (czyli *koincydencji*) w porównaniu z wiązką koherentną o tym samym natężeniu. Jak widzieliśmy, taką sytuację dopuszcza teoria klasyczna. Ze względu na bozonową naturę fotonów można się spodziewać dość powszechnego występowania grupowania fotonów (*photon bunching*) i tak jest w istocie. Na przykład dla pojedynczego modu w stanie termicznym  $g^{(2)}(0) = 2$ . Dużo ciekawszym zjawiskiem jest *rozgrupowanie* fotonów (ang. *photon anti-bunching*; niestety polskie nazwy w tej dziedzinie mają znacznie mniej wdzięku), czyli taki stan światła, w którym w pobliżu jednego fotonu nie spodziewamy się kolejnego (fotony „unikają się” wzajemnie). Odpowiada to klasycznie zabronionym wartościom  $g^{(2)}(0) < 0$ , a eksperymentalnie oznacza deficyt koincydencji zdarzeń detekcyjnych (oczywiście



Rys. 5.5. Przykładowe przebiegi funkcji  $g^{(2)}(\tau)$  (dla pola stacjonarnego) dla światła o fotonach zgrupowanych (zielone) i rozgrupowanych (czerwone) oraz dla światła koherentnego.

wtedy również  $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$ , bo  $g^{(2)}(\tau) \rightarrow 1$  gdy  $\tau \rightarrow \infty$ ). Uzyskanie takiej nieklasycznej wiązki światła wymaga specjalnych zabiegów, a w szczególności pojedynczego, kwantowego źródła (atomu). Łatwo ją jednak skonstruować myślowo: Jeśli fotony są rozmieszczone w wiązce pojedynczo w regularnych odstępach, to koincydencja nie zdarzy się nigdy, a więc jest to wiązka o fotonach rozgrupowanych. Jest to ta sama wiązka, której użyliśmy wcześniej jako przykładu światła o statystyce pod-Poissonowskiej i faktycznie te dwie nieklasyczne własności często idą w parze, choć ściśle rzecz biorąc nie są równoważne. Rzeczywiste eksperymenty, w gruncie rzeczy niezbyt odległe od tej prostej myślowej konstrukcji, omówimy w kolejnym rozdziale.

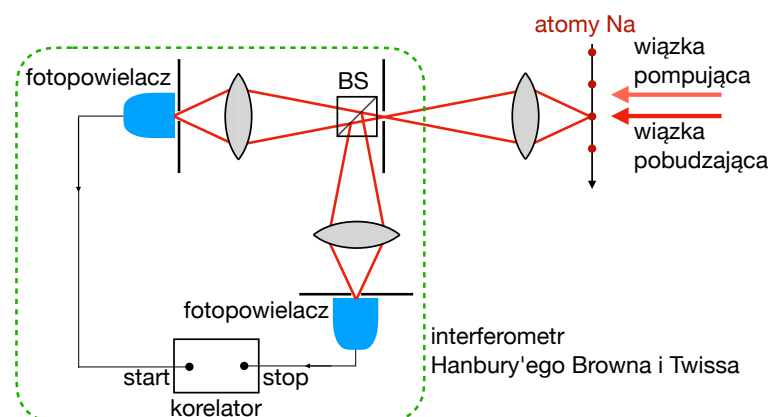
Przykładowe przebiegi funkcji korelacji drugiego rzędu dla światła o fotonach zgrupowanych i rozgrupowanych oraz dla światła koherentnego przedstawia rysunek 5.5.

## 5.4.

## Antygrupowanie fotonów i źródła pojedynczych fotonów: eksperymenty

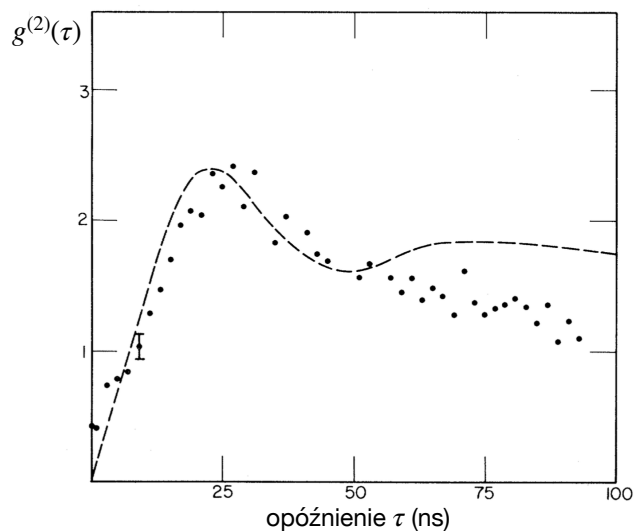
W odróżnieniu od statystyki fotonów, pomiar funkcji autokorelacji na poziomie pojedynczych fotonów nie zależy od wydajności układu detekcyjnego (choć w praktyce nie może ona być zbyt niska, aby dało się zgromadzić odpowiednio dużą liczbę zdarzeń pomiarowych w rozsądnym przedziale czasu). Niezbędne jest tu jednak dokładne określanie różnic czasowych pomiędzy zdarzeniami detekcji fotonów, a w szczególności możliwość detekcji dwóch fotonów w bardzo krótkim odstępie czasu lub nawet jednocześnie przy jednoczesnym zachowaniu wysokiej rozdzielczości czasowej, czego nie da się zrobić na pojedynczym standardowym detektorze ze względu na jego „czas martwy” po każdym zdarzeniu detekcyjnym. Problem ten rozwiązuje użycie dwóch detektorów w układzie HB&T, pozostaje jednak do rozwiązania kwestia obsługi strumienia informacji o zdarzeniach detekcyjnych. Ze względu na ograniczenia szybkości akwizycji danych, do przetwarzania sygnałów detekcyjnych w standardowym eksperymencie wykorzystuje się korelator typu „start–stop”: Sygnał na jednym wejściu korelatora uruchamia licznik czasu („start”), który jest wyłączany po otrzymaniu sygnału na drugim wejściu („stop”), a informacja o zmierzonym przedziale czasowym przekazywana jest do systemu akwizycji danych (komputera), gdzie tworzony jest histogram. Nie jest to ściśle pomiar funkcji korelacji zdefiniowanej w poprzednim rozdziale, ponieważ przy idealnej detekcji zmierzona zostanie statystyka przedziałów czasowych pomiędzy *kolejnymi* fotonami, a nie warunkowy rozkład prawdopodobieństwa. Używane detektory mają jednak zwykle wydajność kwantową daleką od jedności, więc z dobrym przybliżeniem próbują rozkład fotonów w zależności od czasu po zdarzeniu, które wygenerowało sygnał „start”. Ponadto fizycznie najistotniejsza cecha statystyki korelacji — prawdopodobieństwo wystąpienia koincydencji — jest w takim eksperymencie odzwierciedlana wiernie.

Przykład układu pomiarowego do wyznaczania funkcji autokorelacji  $g^{(2)}$  przedstawiony jest na rysunku 5.6. Jest on bardzo podobny do przedstawionego na rysunku 4.11 układu do wyznaczania statystyki fotonów. Źródłem światła są tu ponownie atomy sodu tworzące rozrzedzoną



Rys. 5.6. Uproszczony schemat układu do generacji i detekcji wiązki światła o rozgrupowanych fotonach, wykorzystujący emisję z wiązki atomów sodu [H. J. Kimble, M. Dagenais, L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **39**, 691 (1977)].

Rys. 5.7. Wyniki pomiaru funkcji autokorelacji drugiego rzędu w układzie z rysunku 5.6 (punkty). Linia reprezentuje model teoretyczny, którego nie będziemy tu omawiać. Adaptacja wykresu z pracy H. J. Kimble, M. Dagenais, L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **39**, 691 (1977)].



wiązkę. Ponieważ w obszarze pobudzenia znajduje się tylko jeden atom, który w idealnym przypadku może wyemitować tylko jeden foton (prawdopodobieństwo powtórnego pobudzenia jest małe ze względu na krótki czas przelotu przez obszar pobudzenia), spodziewamy się braku koincydencji w układzie interferometru HB&T. Faktycznie, wynik pomiaru (rysunek 5.7, punkty) wykazuje wyraźne minimum funkcji autokorelacji w pobliżu zerowego opóźnienia, przy czym  $g^{(2)}(0) < 1$ . Mamy tu więc istotnie do czynienia z wiązką nieklasyczną, o rozgrupowanych fotonach.

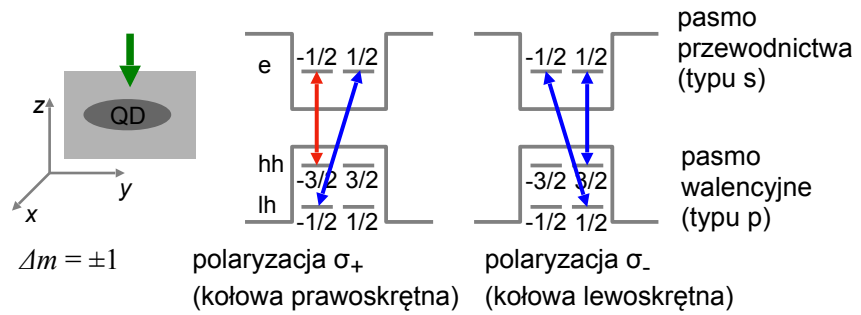
W eksperymencie faktyczna wartość liczby zliczeń z określonym opóźnieniem  $\tau$  zależy od natężenia wiązki, ale też od szerokości przedziału czasowego wybranego przy tworzeniu histogramu. Tymczasem celem pomiaru jest porównanie uzyskanej wartości z graniczną wartością 1, a więc wynik musi być znany bezwzględnie (nie „z dokładnością do stałej”). W teorii funkcja korelacji jest normowana liczbą zliczeń w ustalonym przedziale czasu, ale układ pomiarowy nie dostarcza tej informacji. Standardowym rozwiązaniem tego problemu jest normowanie wyników pomiaru do wartości otrzymywanych dla dużych opóźnień  $\tau$ , ponieważ wiemy, że unormowana funkcja ma własność  $g^{(2)}(\tau) \rightarrow 1$ , gdy  $\tau \rightarrow \infty$ . Co prawda wynik przedstawiony na rysunku 5.7 nie daje klarownej asymptotyki, ale — jak zobaczymy za chwilę — nowsze eksperymenty są pod tym względem jednoznaczne.

Choć pierwsze eksperymenty wykazujące nieklasyczne rozgrupowanie fotonów przeprowadzane były z użyciem wiązek emitowanych przez atomy, obecnie bardzo intensywnie bada się źródła światła w strukturach ciała stałego. Do takich źródeł należą m.in. centra barwne w diamencie i samorosnące półprzewodnikowe kropki kwantowe. Motywacja badań związana jest w dużej mierze z zastosowaniem pojedynczych fotonów w kwantowej komunikacji, np. w niektórych protokołach kryptografii kwantowej (a konkretnie kwantowej dystrybucji klucza kryptograficznego), gdzie zakodowanie informacji w *pojedynczym* układzie kwantowym gwarantuje niemożność jej odczytania bez naruszenia stanu układu<sup>9</sup>. Zastosowanie źródeł atomowych w takich układach byłoby oczywiście całkowicie niepraktyczne. Omówimy tu zastosowanie kropek kwantowych jako źródeł pojedynczych fotonów.

Przez *źródło pojedynczych fotonów* rozumiemy układ, który emituje światło o fotonach idealnie rozgrupowanych, tzn. nie wykazujące koincydencji detekcyjnych. Fizycznie oznacza to, że fotony w wiązce propagują pojedynczo, a więc w pewnym otoczeniu jednego fotonu z pewnością nie ma innego. Interpretacja fizyczna takiego stanu światła jest szczególnie prosta jeżeli źródło pracuje w trybie impulsowym, przy czym długość impulsu jest krótsza od czasu korelacji. Wtedy po prostu każdy impuls zawiera najwyżej jeden foton.

<sup>9</sup> Patrz np. [artykuł w Wikipedii](#).

Rys. 5.8. Reguły wyboru i przejścia optyczne w kropkach przy normalnym padaniu światła. e – stany elektronowe; hh – stany dziur ciężkich; lh – stany dziur lekkich.



Aby zrozumieć, dlaczego kropki kwantowe stanowią potencjalnie dobre źródła światła o fotonach rozgrupowanych — i to zarówno w trybie ciągłym, jak i impulsowym — podsumujmy najpierw krótko ich podstawowe własności optyczne, zilustrowane na rysunku 5.8. Samorosnące kropki kwantowe są strukturami półprzewodnikowymi, które powstają w procesie epitaksjalnego wzrostu związku półprzewodnikowego na podłożu o innej stałej sieci krystalicznej. Wzrost każdej kolejnej warstwy wiąże się z jej naprężeniem, a więc z narastającym kosztem energetycznym. W efekcie jedynie jedna lub dwie warstwy rosną epitaksjalnie, a następnie w układzie — w zależności od użytych materiałów i warunków termodynamicznych — pojawiają się defekty albo tworzą się „wyspy” nanoszonego materiału, w których zysk energetyczny z relaksacji naprężeń przewyższa termodynamiczny koszt zwiększenia powierzchni swobodnej. Te „wyspy” są losowo rozmieszczone, a ich kształt bardzo często przypomina soczewkę z płaską, w przybliżeniu kołową podstawą i wypukłością w kierunku wzrostu. Po nakryciu warstwy takich „wysp” materiałem podłoża uzyskujemy płaszczyznę z losowo rozmieszczonymi kropkami kwantowymi pod powierzchnią próbki półprzewodnikowej. Tu będziemy się zajmować układami materiałowymi, w których „wyspy” zbudowane są ze związku półprzewodnikowego o węższej przerwie wzbronionej, przy czym krawędź pasma walencyjnego leży powyżej krawędzi pasma walencyjnego materiału podłoża, a krawędź pasma przewodnictwa — poniżej. To przesunięcie krawędzi pasm reprezentuje się schematycznie szkicując wartości tych krawędzi w przekroju przez kropkę kwantową (szare linie na rysunku 5.8). W omawianym przypadku kropka kwantowa stanowi obszar potencjału wiążącego zarówno dla elektronów, jak i dla dziur. Przykładem takiego układu jest InAs na podłożu GaAs.

Ze względu na ograniczenie przestrzenne energie nośników są skwantowane (kropka kwantowa stanowi rodzaj trójwymiarowej studni potencjału). W przypadku elektronów stan podstawowy tworzy dublet zdegenerowany ze względu na spin (degeneracja jest oczywiście znoszona przez rozszczepienie Zeemana w polu magnetycznym). Dwa stany tego dubletu zaznaczono na rysunku 5.8 i oznaczono wartościami rzutu spinu na wybraną oś kwantowania  $\pm 1/2$ . W przypadku dziur (stanów pasma walencyjnego) sytuacja jest bardziej skomplikowana. Stany te zbudowane są głównie z atomowych orbitali typu  $p$ , a więc mają moment pędu równy 1, o trzech możliwych wartościach rzutu na oś kwantowania. Uwzględniając dwie wartości rzutu spinu, mamy sześć stanów. Oddziaływanie spin-orbitalne powoduje, że dobrą liczbą kwantową w półprzewodniku objętościowym o wysokiej symetrii (np. o strukturze regularnej, jak InAs lub GaAs) jest jedynie spin całkowity, a sześć stanów rozpada się na dublet o spinie  $j = 1/2$  (spin antyrównoległy do orbitalnego momentu pędu) oraz kwadruplet z  $j = 3/2$  (spin równoległy do orbitalnego momentu pędu). Stany energetycznie bliskie krawędzi pasma i istotne dla własności optycznych to te z  $j = 3/2$ , o wartościach rzutu na oś kwantowania  $m = \pm 1/2$  i  $m = \pm 3/2$ . Ponieważ kropka kwantowa ma niższą symetrię niż kryształ (w przybliżeniu co najwyżej osiową), te cztery stany rozszczepiają się na dwie pary. Stany o  $m = \pm 1/2$  nazywamy stanami dziur lekkich, a stany z  $m = \pm 3/2$  — stanami dziur ciężkich (cząstki w tych stanach mają różne masy efektywne). W niemal wszystkich strukturach stan podstawowy dziur ciężkich leży najbliżej krawędzi pasma. W efekcie, w wyniku obniżenia symetrii, również w pasmie walencyjnym mamy efektywnie dublet stanów, lecz o wartościach momentu pędu (często mówi się o nim niezbyt precyzyjnie „spin”)  $m = \pm 3/2$ . Zauważmy, że osią, względem której określone są te rzuty, jest oś symetrii struktury



ry, która pokrywa się z kierunkiem wzrostu kryształu, a więc jest prostopadła do powierzchni próbki.

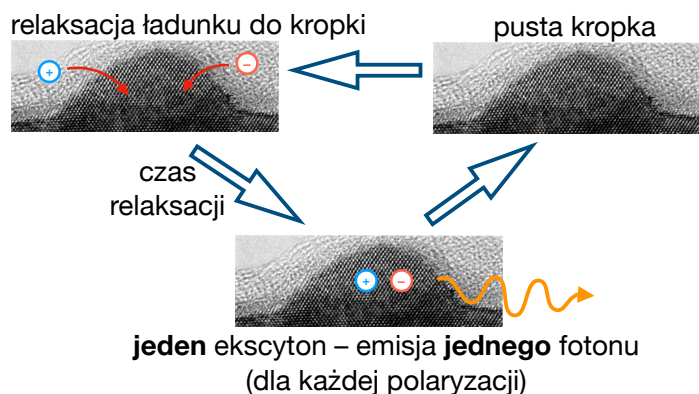
Rozważmy teraz przejścia optyczne z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa. Po pierwsze, możemy dostroić laser energetycznie do przejścia ze stanu podstawowego dziur ciężkich do stanu podstawowego w pasmie przewodnictwa. Są to w sumie cztery możliwe przejścia. Jeżeli jednak światło pada wzdłuż osi wzrostu, to fotony mają względem tej osi moment pędu równy  $\pm 1$  (ze względu na prawo Snella przy typowym współczynniku załamania ok. 3 światło propaguje wewnątrz próbki głównie w kierunku bliskim osi). Zasada zachowania momentu pędu przy przejściu optycznym wymaga, by rzuty momentu pędu stanu początkowego i końcowego różniły się o 1. To ogranicza przejścia ciężkodziurowe do dwóch zaznaczonych pionowymi strzałkami na rysunku 5.8. Ustalając polaryzację prawoskrętną, mamy *tylko jedno* dozwolone przejście, oznaczone czerwoną strzałką.

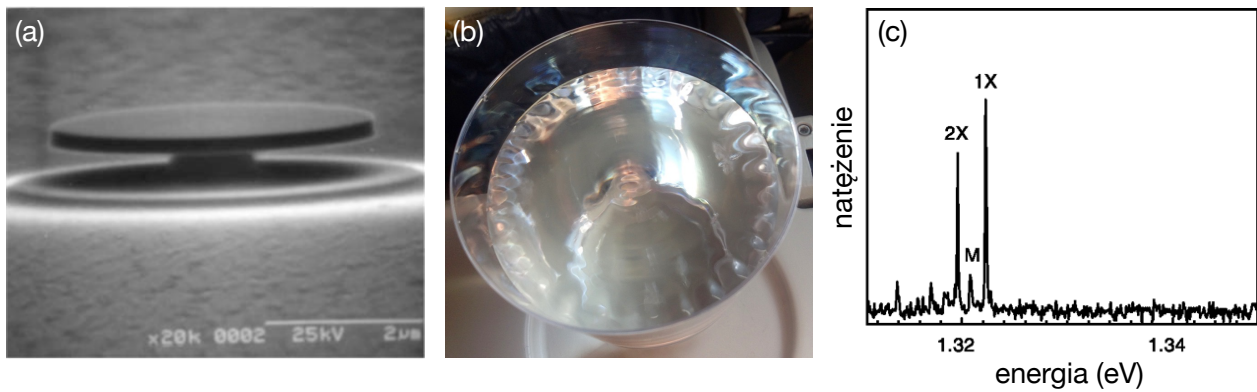
Stan podstawowy niedomieszkowanego półprzewodnika charakteryzuje się całkowicie zapełnionym pasmem walencyjnym i pustym pasmem przewodnictwa. Przeniesienie nośnika z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa powoduje powstanie jednego niezapełnionego stanu w paśmie walencyjnym, czyli *dziury*. Dziura ta ma własności dodatnio naładowanej kwazicząstki, która oddziałuje z elektronem w pasmie przewodnictwa tworząc *ekscyton*. Ze względu na zakaz Pauliego w stanie podstawowym kropki mogą znajdować się najwyżej dwa elektrony i dwie dziury, tworząc dwa ekscytony (biekscyton). Opisane wyżej reguły wyboru powodują, że w wyniku rekombinacji ekscytonu lub biekscytonu powstaną najwyżej dwa fotony o przeciwnych polaryzacjach, a więc w każdej z polaryzacji wyemitowany może zostać najwyżej jeden foton.

Podsumujmy wnioski: kropka kwantowa, mimo że jest częścią makroskopowego ciała stałego jest układem typu atomowego, o skwantowanym widmie, a ponadto dla określonej energii i polaryzacji wiązki staje się efektywnie *układem dwupoziomym*, w którym dozwolone jest tylko jedno przejście optyczne, pomiędzy stanem podstawowym a stanem z jednym ekscytonem.

Na tej podstawie jesteśmy w stanie zrozumieć, dlaczego kropka kwantowa może być dobrym źródłem pojedynczych fotonów. Interesują nas emitowane fotony o określonej częstotliwości i polaryzacji (filtrujemy emitowane światło przy pomocy odpowiedniego polaryzatora). Rozważmy na początek kropkę kwantową pobudzaną w sposób ciągły. Dynamika nośników prowadząca do emisji przedstawiona jest na rysunku 5.9. W typowym eksperymencie pobudzanie przeprowadzane jest nierezonansowo, tzn. laser dostrojony jest do przejść w materiale podłoża i generuje elektrony i dziury o wysokich energiach w całej objętości półprzewodnika. Po upływie pewnego czasu nośniki relaksują do stanu podstawowego kropki kwantowej, skąd może nastąpić emisja spontaniczna. Ponieważ w stanie podstawowym może znajdować się tylko jedna para elektron–dziura o ustalonej polaryzacji, emitowany jest zawsze tylko jeden foton, a potem kropka jest pusta. Wyemitowanie kolejnego fotonu wymaga wyłapania do kropki i relaksacji kolejnej pary, co wymaga pewnego czasu. Dlatego kolejny foton nie może się pojawić natychmiast po emisji poprzedniego, a więc fotony są rozgrupowane — emitowane pojedynczo.

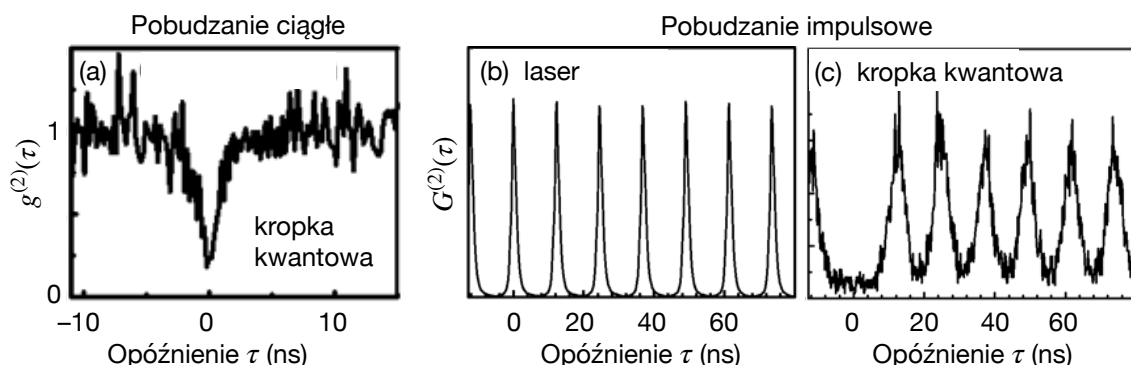
Rys. 5.9. Kropka kwantowa jako źródło pojedynczych fotonów. Rysunek przedstawia dynamikę relaksacji i rekombinacji par elektron–dziura o spinach odpowiadających jednemu z przejść, wybranemu przez selekcję polaryzacji w układzie detekcji. Równoległe ma miejsce identyczna dynamika nośników o przeciwnych spinach.





Rys. 5.10. (a) Trawiony rezonator z (niewidocznymi na rysunku) kropkami kwantowymi wewnątrz. (b) Mod galerii szeptów wzbudzony na kubku wody w wibrującym samolocie. (c) Widmo kropki kwantowej: 1X – ekscyton; 2X – biekscyton; M – mod własny rezonatora. Źródła (a,c): Michler *et al.*, Science **290**, 2282 (2000) (adaptacja).

Eksperymentalną realizację tej koncepcji przeprowadzono z wykorzystaniem kropek kwantowych umieszczonych w trawionych rezonatorach (rysunek 5.10(a)). Struktura jest tak wytrawiona, że dysk rezonatora obejmuje fragment płaszczyzny zawierającej kropki kwantowe. W takim rezonatorze światło jest częściowo uwięzione dzięki różnicy współczynnika załamania pomiędzy materiałem półprzewodnikowym a powietrzem (typowo w półprzewodniku  $n \approx 3$ ). Przy padaniu dalekim od normalnego efekt całkowitego wewnętrznego odbicia uniemożliwia światłu opuszczenie rezonatora. Pojawiają się w efekcie częściowo uwięzione fale stojące krążące wzdłuż obwodu rezonatora, które nazywamy „modami galerii szeptów” (ang. *whispering gallery mode*<sup>10</sup>). Analogiczne mody drgań można zaobserwować na kubku z wodą poddanym wibracjom o odpowiedniej (rezonansowej) częstotliwości (rysunek 5.10(b)). Jeśli w pobliżu zewnętrznego obwodu dysku rezonatora znajdzie się kropka kwantowa, to będzie ona silnie oddziaływała z takim modem. Typowe widmo układu przedstawione jest na rysunku 5.10(c). Składa się ono z linii ekscytonowej, linii biekscytonowej (o której będzie mowa w dalszej części tego rozdziału) oraz linii związanej z modem rezonatora. Linie ekscytonowe można przesuwając względem modu rezonatora poprzez zmianę temperatury, doprowadzając do rezonansu, co zwiększa wydajność emisji (uwięzienie modu jest niedoskonałe, a czas uwięzienia fotonu w rezonatorze jest tu w istocie dużo krótszy od czasu życia ekscytonu).



Rys. 5.11. Wyniki pomiarów funkcji autokorelacji drugiego rzędu: (a) światło emitowane przez pojedynczą kropkę kwantową pobudzaną w sposób ciągły; (b) światło lasera impulsowego; (c) światło emitowane przez pojedynczą kropkę kwantową pobudzaną laserem impulsowym.  $G^{(2)}(\tau)$  jest nieunormowaną funkcją autokorelacji. Źródło: Michler *et al.*, Science **290**, 2282 (2000) (adaptacja).

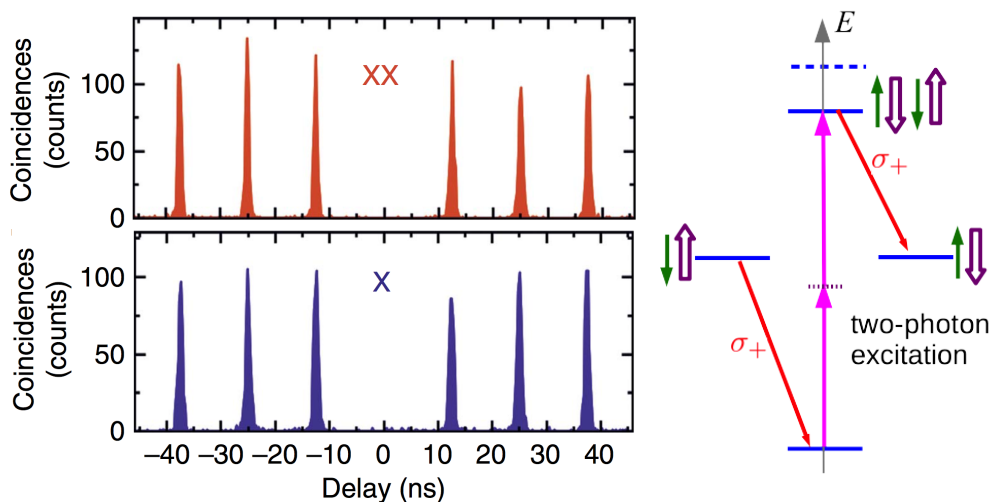
<sup>10</sup> Nazwa odnosi się do galerii szeptów w obiektach architektonicznych.



Wyniki pomiarów funkcji autokorelacji w takim układzie przedstawione są na rysunku 5.11. W przypadku pobudzenia ciągłego, które odpowiada naszej dotychczasowej dyskusji, obserwujemy wyraźne minimum dla zerowego czasu opóźnienia, w którym funkcja  $g^{(2)}(\tau)$  osiąga wartość znacznie mniejszą od 1, dowodząc, że kropka kwantowa istotnie emituje w przeważającej mierze pojedyncze fotony. Zauważmy przy okazji, że asymptotyka funkcji autokorelacji dla dużych  $\tau$  jest tu bardzo wyraźna, co umożliwia unormowanie sygnału, jak to zrobiono na przedstawionym tu wykresie.

W przypadku pobudzenia laserem impulsowym przebieg funkcji autokorelacji jest inny i składa się z szeregu równoodległych maksimum. Na rysunku 5.11(b) przedstawiona jest funkcja autokorelacji dla samego światła laserowego. Ponieważ emisja fotonu może nastąpić jedynie w momencie pobudzenia, dwa zliczenia muszą być oddzielone o wielokrotność okresu powtarzania lasera impulsowego. Ponieważ impuls laserowy niesie bardzo wiele fotonów, koincydencje zliczeń są równie częste jak pary zdarzeń detekcyjnych zachodzących w różnych chwilach — maksimum w  $\tau = 0$  nie różni się od pozostałych. Jeśli jednak światło pochodzi z kropki kwantowej, to koincydencja jest bardzo mało prawdopodobna, gdyż wymagałaby ponownego wyłapania i relaksacji nośników pochodzących z tego samego impulsu laserowego, a to jest nieprawdopodobne, bo rekombinacja nośników w objętości półprzewodnika jest szybsza niż ich wyłapywanie do kropki. W efekcie, jak widać na rysunku 5.11(c), znika maksimum w  $\tau = 0$ . Brak tego centralnego maksimum jest standardowym eksperymentalnym potwierdzeniem jednofotonowej natury wiązki, a wartość funkcji autokorelacji  $g^{(2)}(0)$  jest miarą jakości emitera jako źródła pojedynczych fotonów (*czystości źródła*, ang. *purity*).

Na koniec, aby docenić postęp w rozwoju metod wytwarzania struktur półprzewodnikowych oraz technik optycznych, jaki dokonał się w ciągu ostatnich lat, zapoznajmy się z wynikami znacznie nowszego eksperymentu. Przeprowadzony on został z wykorzystaniem kropek kwantowych uzyskanych poprzez trawienie podłoża AlGaAs kroplą glinu, a następnie wypełnienie powstałej w ten sposób nano-dziury arsenkiem galu. Struktura stanu podstawowego w takich kropkach jest identyczna jak w kropkach samorosnących: po dwa stany w pasmie walencyjnym i przewodnictwa pozwalają wzbudzić dwa ekscytony oddziałujące ze światłem o przeciwnych polaryzacjach (na diagramie po prawej stronie rysunku 5.12 oznaczone dwiema strzałkami reprezentującymi orientacje spinów elektronu i dziury) oraz stan czterocząstkowy, czyli biekscytonowy. Ze względu na oddziaływania kulombowskie energia biekscytonu jest przesunięta (zwykle w dół) w stosunku do podwojonej energii ekscytonu. To oznacza, że laser dostrojony do połowy energii przejścia biekscytonowego nie będzie w rezonansie z żadnym z przejść ekscytonowych, natomiast będzie wzbudzał stan biekscytonowy przez przejście dwufotonowe. W odróżnieniu od omówionej wyżej starszej realizacji, w której nośniki były wyłapywane ze stanów o wyższej energii, mamy tu pobudzenie *rezonansowe*, wykluczające obecność w układzie „zabłąkanych” nośników, które mogłyby zostać wyłapane w dowolnym momencie, generując np. podwójne pobudzenie w obrębie jednego impulsu i psując w ten sposób rozgrupowanie fotonów. Biekscyton emituje światło rekombinując kaskadowo przez jeden z dwóch stanów jednoekscytonowych. Przejścia te mają różne energie i zawsze dokładnie jeden foton ma polaryzację prawoskrętną, jak zaznaczono na rysunku. Pomiar funkcji autokorelacji można prowadzić dla każdego z przejść osobno i w obu przypadkach spodziewamy się, że nie wystąpią koincydencje. Taki też jest wynik eksperymentu, przedstawiony na wykresach w lewej części rysunku 5.12. Zauważmy, że zastosowanie struktury o bardzo dobrych własnościach optycznych oraz rezonansowej techniki pobudzenia pozwoliło niemal całkowicie wyeliminować szum tła oraz obniżyć wartość  $g^{(2)}(0)$  do 0,002 i 0,007 odpowiednio dla przejścia biekscytonowego i ekscytonowego.



Rys. 5.12. Wyniki pomiarów funkcji autokorelacji drugiego rzędu dla przejścia ekscytonowego (niebieski wykres) i biexcytonowego (czerwony wykres) oraz diagram stanów ekscytonowych i biexcytonowych ilustrujący metodę pobudzenia i rejestrowane w eksperymencie przejścia optyczne. Źródło wykresów: D. Huber *et al.* Nature Comm. **8**, 15506 (2017) (adaptacja).

W tym rozdziale omówione zostaną dwie bardzo ważne klasy stanów kwantowych pola jednorodnego: stany koherentne i ścieśnione. Dotąd jedyną kwantową własnością pola, która była nam potrzebna, był jego korpuskularny charakter – istnienie fotonów. Teraz jednak potrzebna będzie pewna minimalna ilość poważniejszego formalizmu. Dlatego najpierw musimy dostrzec analogię pomiędzy kwantowym polem jednorodnym a oscylatorem harmonicznym, aby w łatwy sposób dojść do nieco uproszonego, ale wystarczającego dla nas w tym momencie kwantowego opisu pola.

### 6.1. Kwantowy opis pola

W tym rozdziale sformułujemy kwantowy opis pola poprzez analogię z jednowymiarowym oscylatorem harmonicznym, którego kwantowanie znane jest z kursu mechaniki kwantowej.

Przypomnijmy, że jednowymiarowy oscylator harmoniczny o masie  $m$  i częstości własnej  $\omega$  to układ, którego równania ruchu dla położenia  $x$  i pędu  $p_x$  mają postać

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p_x, \quad \dot{p}_x = -m\omega^2 x.$$

Rozwiązaniem tych równań jest oczywiście ruch harmoniczny,

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi), \quad p_x(t) = -m\omega A \sin(\omega t - \phi),$$

odpowiadający warunkom początkowym

$$x(0) = A \cos \phi, \quad p_x(0) = m\omega A \sin \phi.$$

Równoważnie można zapisać rozwiązanie w rozkładzie na kwadratury,

$$x(t) = A \cos \phi \cos \omega t + A \sin \phi \sin \omega t = x(0) \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} p_x(0) \sin \omega t. \quad (6.1)$$

Energia oscylatora wynosi

$$E = \frac{p_x^2(t)}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2(t) = \frac{p_x^2(0)}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2(0) \quad (6.2)$$

i jest oczywiście stała.

Do opisu kwantowego przechodzimy definiując operatory  $x, p_x$ , które spełniają kanoniczną relację komutacji

$$[x, p_x] = i\hbar, \quad (6.3)$$

z której wynika zasada nieoznaczoności Heisenberga

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2. \quad (6.4)$$

Rozważmy teraz pole jednorodowe w rezonatorze o długości  $L$ . Zakładamy dla uproszczenia, że jest ono liniowo spolaryzowane w kierunku  $x$  i propaguje wzdłuż rezonatora w kierunku

$z$ , a zwierciadła rezonatora stanowi doskonały przewodnik, który wymusza zerowanie się stycznej składowej pola elektrycznego. Wtedy niezerowa składowa natężenia pola elektrycznego ma postać

$$\mathcal{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_0 \sin kz \cos(\omega t - \phi) = \mathcal{E}_0 \sin kz \cos \phi \cos \omega t + \mathcal{E}_0 \sin kz \sin \phi \sin \omega t, \quad (6.5)$$

gdzie  $k = n\pi/L$  dla pewnej liczby naturalnej  $n$ , a  $\omega = ck$ , gdzie  $c$  jest prędkością światła (zakładamy, że w rezonatorze jest próżnia lub powietrze; w przeciwnym razie należy uwzględnić współczynnik załamania). Czynniki  $\sin kz$  opisuje kształt modu pola (jest to „funkcja modowa”) i oczywiście dla realistycznego modelu rezonatora mógłby być bardziej skomplikowany, co jednak nie ma żadnego znaczenia dla naszych rozważań.

Pole magnetyczne powinno być prostopadłe do pola elektrycznego i poprzeczne w stosunku do kierunku propagacji, stąd jego jedyną składową jest składowa  $y$ . Prawo Ampère’a, wobec braku prądów wewnątrz rezonatora ma postać  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ , gdzie  $\mathbf{B}$  jest indukcją magnetyczną, a  $\mu_0$  i  $\epsilon_0$  oznaczają, odpowiednio, przenikalność magnetyczną i elektryczną próżni. Otrzymujemy stąd relację pomiędzy nieznikającymi składowymi pól

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t}.$$

Rozwiązanie tego równania zgodne z równaniem (6.5) ma postać

$$B_y(z, t) = -(\mathcal{E}_0/c) \cos kz \sin(\omega t - \phi) = (\mathcal{E}_0/c) \cos kz \sin \phi \cos \omega t - (\mathcal{E}_0/c) \cos kz \cos \phi \sin \omega t. \quad (6.6)$$

Zdefiniujmy teraz funkcje

$$q(t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{2\omega^2}} \mathcal{E}_0 \cos(\omega t - \phi), \quad p(t) = -\sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{2}} \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - \phi). \quad (6.7)$$

Wtedy oczywiście

$$q(0) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{2\omega^2}} \mathcal{E}_0 \cos \phi, \quad p(0) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{2}} \mathcal{E}_0 \sin \phi,$$

a więc zdefiniowane w ten sposób zmienne są proporcjonalne do amplitud kwadratur (patrz rozdział 2.1). Pole elektryczne, równanie (6.5), możemy teraz zapisać jako

$$\mathcal{E}_x(z, t) = \sin kz \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 V}} [\omega q(0) \cos \omega t + p(0) \sin \omega t]. \quad (6.8)$$

Obliczmy energię pola, całkując gęstość energii po objętości rezonatora

$$E = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3 r [\mathcal{E}^2(z, t) + c^2 B^2(z, t)].$$

Pola podstawiamy z równań (6.5) i (6.6), w których – na podstawie równań (6.7) – wstawiamy  $\mathcal{E}_0^2 = 2(\omega^2 q^2 + p^2)/(\epsilon_0 V)$ . Otrzymujemy

$$E = \frac{\epsilon_0}{2} S \int_0^L dz \left[ \frac{2}{\epsilon_0 V} (\omega^2 q^2 + p^2) (\sin^2 kz \cos^2(\omega t - \phi) + \cos^2 kz \sin^2(\omega t - \phi)) \right],$$

gdzie  $S$  jest powierzchnią przekroju poprzecznego rezonatora. Wykonujemy prostą całkę po  $z$ ,

$$\int_0^L dz \sin^2 kz = \int_0^L dz \cos^2 kz = L/2,$$

korzystamy z oczywistej tożsamości trygonometrycznej i uwzględniamy fakt, że  $SL = V$ . Prowadzi to do ostatecznego wyniku

$$E = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2. \quad (6.9)$$

Porównanie z równaniem (6.2) prowadzi do wniosku, że energia pola modowego w zmiennych  $q, p$  ma formalnie taką samą postać, jak energia mechanicznego oscylatora harmonicznego „o masie 1” (co jest oczywiście bez sensu z punktu widzenia wymiaru fizycznego; zmienne  $q, p$  nie mają w istocie wymiaru położenia  $[L]$  i pędu  $[P]$ , lecz  $[M^{1/2}L]$  i  $[M^{-1/2}P]$ ).

Zauważmy ponadto, że zmienne  $q$  i  $p$  spełniają równania ruchu

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega q,$$

a więc równania oscylatora harmonicznego „o masie 1”.

Pokazaliśmy w ten sposób, że pole jednomodowe jest równoważne jednowymiarowemu oscylatorowi harmonicznemu (co prawda nasze wyprowadzenia mają charakter pół-formalny, jednak ta równoważność jest ścisłym matematycznym faktem). Kwantujemy więc pole korzystając z tej analogii, poprzez zadanie relacji komutacji dla operatorów  $q, p$  jak dla położenia i pędu oscylatora (równanie (6.3))

$$[q, p] = i\hbar. \quad (6.10)$$

To oznacza również, że pomiędzy tymi wielkościami zachodzi relacja nieoznaczoności identyczna z relacją Heisenberga opisaną równaniem (6.4),

$$\Delta q \Delta p \geq \hbar/2. \quad (6.11)$$

W optyce kwantowej stosuje się w rzeczywistości inne zmienne, proporcjonalne do nieco sztucznych wielkości  $q$  i  $p$ . Te zmienne uzyskuje się z przeskalowania  $q$  i  $p$  zdefiniowanego w taki sposób, że uzyskane wielkości są bezwymiarowe,

$$X_1 = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} q(0), \quad X_2 = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} p(0). \quad (6.12)$$

Skoro  $q(0)$  i  $p(0)$  są proporcjonalne do amplitud kwadratur, to również wielkości  $X_1$  i  $X_2$  są do nich proporcjonalne. Są to podstawowe wielkości w optyce kwantowej i zwykle mówi się o nich po prostu jako o „kwadraturach” pola. Po skwantowaniu stają się one *operatorami kwadratur*. Z tożsamości (6.10) otrzymujemy natychmiast ich komutator

$$[X_1, X_2] = \frac{i}{2}, \quad (6.13)$$

natomiast z równania (6.11) wynika wprost zasada nieoznaczoności

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{1}{4}. \quad (6.14)$$

Korzystając z równań (6.8) i (6.12) można teraz zapisać operator pola elektrycznego w postaci

$$\mathcal{E}_x(z, t) = \sin kz \sqrt{\frac{4\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} (X_1 \cos \omega t + X_2 \sin \omega t), \quad (6.15)$$

skąd widać wprost, że  $X_1$  i  $X_2$  są amplitudami kwadratur z dokładnością do stałej. Energia (Hamiltonian pola jednomodowego) ma postać wprost wynikającą z równania (6.9),

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}p^2(0) + \frac{1}{2}\omega^2 x^2(0) = \hbar\omega (X_1^2 + X_2^2),$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że energia jest zachowana, więc można ją wyliczyć w chwili początkowej.

Fakt, że operatory kwadratur nie komutują ze sobą ma fundamentalne znaczenie. Przypomnijmy, że w klasycznej optyce stan pola jednomodowego jest w pełni określony poprzez podanie amplitudy i fazy bądź poprzez określenie wartości obu amplitud kwadratur (rozdział 2.1). Na diagramie fazowym pole takie reprezentowane jest przez punkt. W mechanice kwantowej nie jest to możliwe, ponieważ kwadratury  $X_1$  i  $X_2$  wiąże zasada nieoznaczoności. W konsekwencji nie jest również możliwa jednoczesna znajomość amplitudy i fazy pola. Na diagramie fazowym reprezentujemy umownie pole kwantowe poprzez obszar, którego środek odpowiada średnim wartościom  $\langle X_1 \rangle$  i  $\langle X_2 \rangle$ , a rozmiary wzdłuż osi układu współrzędnych reprezentują nieoznaczoności tych wielkości.

## 6.2. Stany koherentne

Zacznijmy od scharakteryzowania stanu **próżni**. Jest to taki stan, którego energia jest najniższa z możliwych, przy zachowaniu zasady nieoznaczoności dla kwadratur. Średnia energia stanu kwantowego pola wynosi

$$\bar{E} = \langle H \rangle = \hbar\omega (\langle X_1^2 \rangle + \langle X_2^2 \rangle).$$

Mamy  $\langle X_i^2 \rangle = \langle X_i \rangle^2 + (\Delta X_i)^2$ , gdzie  $\Delta X_i$  jest nieoznaczonością kwadratury. Stąd

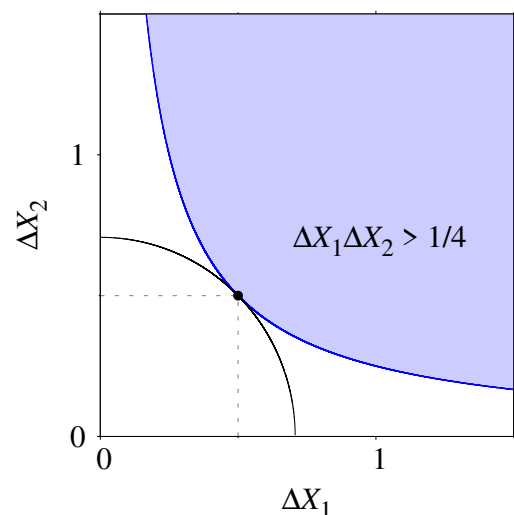
$$\bar{E} = \hbar\omega (\langle X_1 \rangle^2 + \langle X_2 \rangle^2 + (\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2), \quad (6.16)$$

a więc energia jest minimalna, jeśli średnie kwadratur są równe zero (co jest dopuszczalne), a suma kwadratów ich nieoznaczoności jest minimalna (nie można żądać, żeby była równa zero, gdyż łamałoby to zasadę nieoznaczoności).

Minimalizację sumy  $(\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2$  przy zachowanej zasadzie nieoznaczoności  $\Delta X_1 \Delta X_2 \geq 1/4$  najłatwiej jest przeprowadzić geometrycznie. Na rys. 6.1 wartości nieoznaczoności spełniające zasadę nieoznaczoności leżą w obszarze zacienionym. Wartość  $(\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2$  to kwadrat odległości od początku układu współrzędnych. Punkt, dla którego zasada nieoznaczoności jest spełniona, a jednocześnie odległość ta jest najmniejsza zaznaczono kropką. Odpowiada on  $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 1/2$ .

W ten sposób scharakteryzowaliśmy stan próżni:

$$\langle X_1 \rangle = \langle X_2 \rangle = 0, \quad \Delta X_1 = \Delta X_2 = 1/2 \quad (\text{próżnia}).$$



Rys. 6.1. Konstrukcja do minimalizacji energii próżni przy zachowaniu zasady nieoznaczoności dla kwadratur.



Energia stanu próżni nie wynosi 0, lecz  $(1/2)\hbar\omega$ . Jest to związane z kwantowymi fluktuacjami pola, które muszą występować, by zasada nieoznaczoności była spełniona. Z drugiej strony, z równania (6.15) wynika, że średnia wartość natężenia pola wynosi 0. Interpretujemy to w ten sposób, że choć pole elektryczne w stanie próżni nie jest równe zero (gdyż wtedy energia byłaby zerowa), to jego *faza* jest całkowicie losowa, stąd natężenie pola uśrednia się do zera (bo średnia z  $\mathcal{E}_0 \cos(\omega t - \phi)$  wynosi 0, jeśli  $\phi$  przyjmuje z jednakowym prawdopodobieństwem wartości od 0 do  $2\pi$ ).

Istnieje oczywiście szersza klasa stanów, dla których nieoznaczoności minimalizują zasadę nieoznaczoności, lecz średnie wartości kwadratur (a więc i średnia wartość natężenia pola elektrycznego) nie są zerowe. Jeśli obie nieoznaczoności są równe i wynoszą  $1/2$ , to stan taki nazywamy **stanem koherentnym** (próżnia jest szczególnym przypadkiem takiego stanu). Graficzną reprezentację próżni i stanu koherentnego na diagramie fazowym przedstawia rysunek 6.2.

Stan koherentny oznaczamy przez  $|\alpha\rangle$ , gdzie  $\alpha$  jest liczbą zespoloną  $\alpha = \langle X_1 \rangle + i\langle X_2 \rangle$ . Oczywiście  $|\alpha|^2 = \langle X_1 \rangle^2 + \langle X_2 \rangle^2$ , a więc – zgodnie z równaniem (6.16) – średnia energia takiego stanu wynosi

$$\boxed{\bar{E} = \hbar\omega \left( |\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right)} \quad \text{stan koherentny.}$$

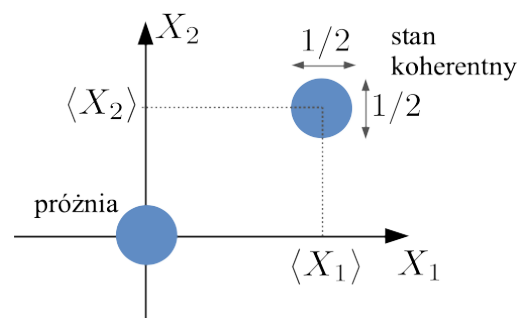
Ponieważ  $(1/2)\hbar\omega$  stanowi wkład od fluktuacji próżni,  $\hbar\omega|\alpha|^2$  musi być średnią energią fotonów, z których każdy ma energię  $\hbar\omega$ . Stąd średnia liczba fotonów w stanie koherentnym wynosi

$$\boxed{\bar{n} = |\alpha|^2} \quad \text{stan koherentny.}$$

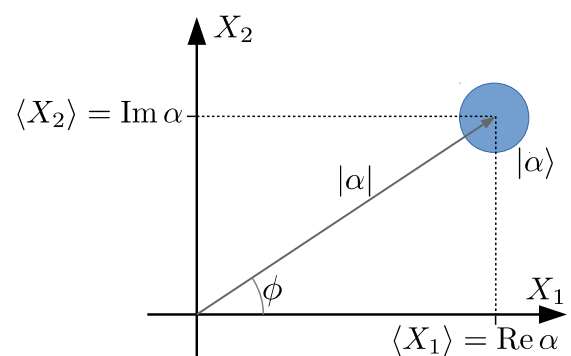
Pisząc  $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$  mamy  $\langle X_1 \rangle = |\alpha| \cos \phi$ ,  $\langle X_2 \rangle = |\alpha| \sin \phi$  i dostajemy z równania (6.15)

$$\langle \mathcal{E}_x(z, t) \rangle = \sin kz \sqrt{\frac{4\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} |\alpha| (\cos \phi \cos \omega t + \sin \phi \sin \omega t) = \sin kz \sqrt{\frac{4\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} |\alpha| \cos(\omega t - \phi).$$

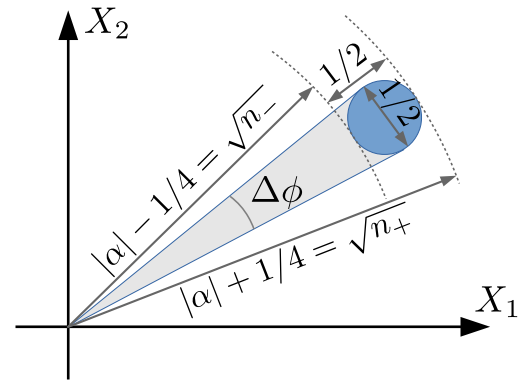
Fazę (argument) liczby zespolonej  $\alpha$  można więc w jakimś stopniu utożsamić z fazą pola elektrycznego w stanie koherentnym. Graficzną reprezentację amplitudy i fazy stanu koherentnego na diagramie fazowym interpretowanym jako płaszczyzna zespolona przedstawia rysunek 6.3.



Rys. 6.2. Reprezentacja stanu próżni oraz stanu koherentnego na diagramie fazowym.



Rys. 6.3. Amplituda i faza stanu koherentnego na diagramie fazowym.



Rys. 6.4. Nieoznaczoności liczby fotonów i fazy w stanie koherentnym. Nieoznaczoność liczby fotonów równa jest  $n_+ - n_- = |\alpha|$ .

Nieoznaczoność obu kwadratur oznacza, że ani liczba fotonów, ani faza pola nie są w stanie koherentnym jednoznacznie określone. Istotnie, graficzna reprezentacja stanu koherentnego sugeruje nieoznaczoność wartości  $\sqrt{\bar{n}}$  odpowiadającą przedziałowi od  $|\alpha| - 1/4$  do  $|\alpha| + 1/4$  (rysunek 6.4), czyli  $\Delta\sqrt{\bar{n}} = 1/2$ . Mamy stąd

$$\Delta n = \Delta(\sqrt{\bar{n}})^2 = 2\sqrt{\bar{n}}\Delta\sqrt{\bar{n}} = \sqrt{\bar{n}} = |\alpha|.$$

A więc dla stanu koherentnego

$$\boxed{(\Delta n)^2 = \bar{n}} \quad \text{stan koherentny,}$$

czyli jest to stan o Poissonowskiej statystyce fotonów. Dla nieoznaczoności fazy, posługując się znowu rysunkiem 6.4 mamy z definicji miary łukowej kąta  $\Delta\phi = (1/2)/|\alpha| = 1/(2\Delta n)$ . Widać stąd, że nieoznaczoność fazy maleje, gdy pole staje się coraz silniejsze ( $|\alpha|$  rośnie). Ponadto mamy przybliżoną „relację nieoznaczoności” dla fazy i liczby fotonów w stanie koherentnym:  $\Delta n \Delta\phi = 1/2$ . Z rysunku 6.4 jest jednak jasne, że cała nasza dyskusja ma sens jedynie wtedy, gdy  $|\alpha|$  nie jest zbyt małe. W istocie, w optyce kwantowej nie istnieje operator fazy, a przybliżenie takiego operatora można skonstruować jedynie dla silnych pól. Wtedy istotnie pokazuje się, że dla liczby fotonów i fazy istnieje przybliżona zasada nieoznaczoności, a stan koherentny ją minimalizuje.

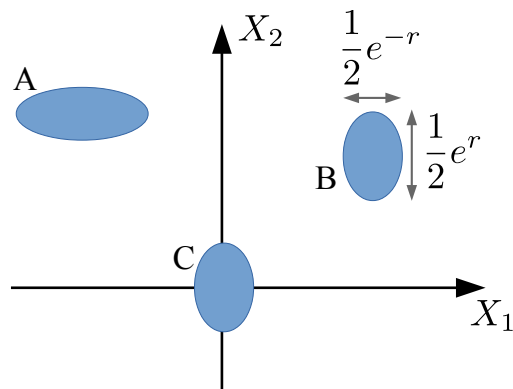
Podsumujmy własności stanów koherentnych: Wykazują one Poissonowską statystykę fotonów, względna niepewność liczby fotonów (a więc energii, a stąd amplitudy pola) maleje wraz ze wzrostem natężenia pola i mają one określoną fazę (przy dostatecznie dużym natężeniu), której niepewność maleje do zera, w miarę jak pole staje się silniejsze (granica klasyczna). Ze względu na te własności, dostatecznie silne stany koherentne są najbliższe „polu klasycznemu”. Okazuje się, że taki właśnie stan kwantowy opisuje światło emitowane przez laser. Stany koherentne mają bardzo duże znaczenie w formalizmie optyki kwantowej, ponieważ stanowią układ zupełny, tzn. dowolny stan pola można przedstawić jako superpozycję stanów koherentnych.

### 6.3.

#### Stany ścięśnione

Stany, w których nieoznaczoność którejś z kwadratur jest mniejsza niż w przypadku stanu koherentnego (lub próżni), stanowią bardzo ważną klasę stanów światła. Istnieją też stany, w których zredukowana jest nieoznaczoność amplitudy (liczby fotonów) albo fazy. W tym rozdziale omawiamy głównie redukcję fluktuacji kwadratur, ograniczając pozostałe przypadki do krótkiej wzmianki w ostatnim podrozdziale.

Rys. 6.5. Stany ścieśnione: (A) stan ścieśniony w drugiej kwadraturze; (B) ścieśniony (w pierwszej kwadraturze) stan koherentny; (C) ścieśniona próżnia.



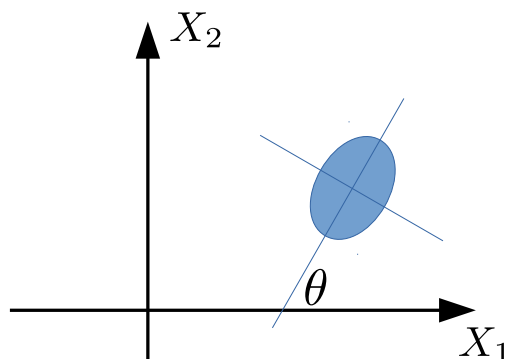
### 6.3.1. Ścieśnianie kwadraturowe

W stanie koherentnym fluktuacja każdej z kwadratur jest taka sama jak w stanie próżni: nieoznaczoność kwadratury wynosi  $1/2$ . Stany, dla których  $\Delta X_1 < 1/2$  lub  $\Delta X_2 < 1/2$ , czyli fluktuacje jednej z kwadratur są poniżej poziomu próżniowego, nazywamy *stanami ścieśnionymi kwadraturowo* (ang. *quadrature-squeezed*). Jeśli ponadto stan taki minimalizuje zasadę nieoznaczoności, czyli  $\Delta X_1 \Delta X_2 = 1/4$ , to nazywamy go *koherentnym stanem ścieśnionym*. Oczywiście, ze względu na zasadę nieoznaczoności, jeśli nieoznaczoność jednej z kwadratur jest poniżej wartości próżniowej, to nieoznaczoność drugiej musi być większa. Graficzną reprezentację stanów ścieśnionych kwadraturowo przedstawia rysunek 6.5. Światło można ścieśniać kwadraturowo nie tylko w bazowych kwadraturach, ale względem dowolnie obróconej osi na diagramie fazowym (rysunek 6.6). Formalnie oznacza to inny wybór fazy początkowej  $\theta$  w rozkładzie pola na kwadratury,

$$\mathcal{E}(t) = \tilde{\mathcal{E}}_0 \cos(\omega t - \phi) = \tilde{\mathcal{E}}_0 \cos[(\omega t - \theta) - (\phi - \theta)] = \tilde{\mathcal{E}}_0 \cos(\phi - \theta) \cos(\omega t - \theta) + \tilde{\mathcal{E}}_0 \sin(\phi - \theta) \sin(\omega t - \theta)$$

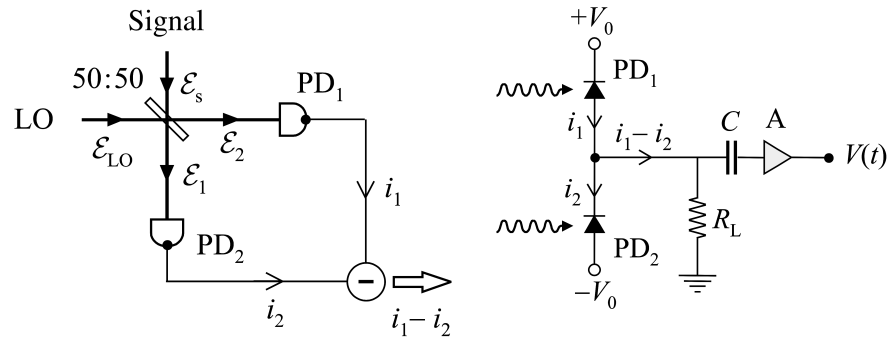
(dotychczas rozważaliśmy  $\theta = 0$ ). Nowymi amplitudami kwadratur są teraz  $\tilde{\mathcal{E}}_0 \cos(\phi - \theta)$  i  $\tilde{\mathcal{E}}_0 \sin(\phi - \theta)$ . Ponieważ wybór początkowej fazy jest dowolny, taki rozkład nie wnosi żadnych nowych własności fizycznych i można ograniczyć dyskusję do standardowego ścieśniania w bazowych kwadraturach  $X_1$  i  $X_2$ .

Stany ścieśnione — pomijając fakt, że są ciekawe pod względem formalnym — mają duże znaczenie w interferometrii, gdzie o rozdzielczości eksperymentu interferencyjnego decyduje szum śrutowy stanu próżni na „niewykorzystanym” wejściu interferometru, przy czym znaczenie ma tylko jedna kwadratura, będąca w fazie z mierzonym sygnałem. Można więc pokonać to ograniczenie, jeśli zamiast próżni na wejściu interferometru pojawi się próżnia ścieśniona w odpowiedniej kwadraturze. Te rozważania odkładamy do kolejnych rozdziałów, a tymczasem pokażemy, w jaki sposób można eksperymentalnie zweryfikować ścieśnienie stanu pola oraz w jaki sposób stany ścieśnione można wytwarzać.



Rys. 6.6. Stan ścieśniony w „obróconej” kwadraturze.

Rys. 6.7. Zrównoważona detekcja homodynowa: zarys układu pomiarowego i schemat elektroniczny. Źródło grafiki: M. Fox, *Quantum Optics*.



### 6.3.2. Detekcja stanów ścięśnionych kwadraturowo

Detekcję stanów ścięśnionych przeprowadza się w układzie zrównoważonej detekcji homodynowej, przedstawionym schematycznie na rys. 6.7. Jest to taki sam układ, jaki pojawił się w dyskusji na temat redukcji szumu klasycznego. Tu dodatkowym elementem jest silna wiązka koherentna nazywana *lokalnym oscylatorem* (LO), która pada na jedno z wejść dzielnika wiązki. Ogólnie rzecz biorąc, homodyna optyczna oznacza interferencję wiązki badanej (sygnałowej) z silną wiązką (lokalnym oscylatorem) o tej samej częstotliwości<sup>1</sup>. Sam sygnał daje prąd detektora  $J_s \sim |\mathcal{E}_s|^2$ , który jest drugiego rzędu w polu wiązki sygnałowej, a więc bardzo mały. Natomiast prąd detektora w układzie homodynowym jest  $J_h \sim |\mathcal{E}_{LO} + \mathcal{E}_s|^2 = |\mathcal{E}_{LO}|^2 + 2 \operatorname{Re} \mathcal{E}_{LO}^* \mathcal{E}_s + \dots$ , a więc zawiera składową liniową w  $\mathcal{E}_s$ , czyli dużo większą od  $|\mathcal{E}_s|^2$ .

Musimy się jednak pozbyć dominującej i zupełnie nieinteresującej składowej  $|\mathcal{E}_{LO}|^2$ . Właśnie dlatego dokonujemy pomiaru w układzie detekcji zrównoważonej. Wiązka LO dzieli się na pół, dając jednakowe natężenia na obu detektorach, a ponieważ sygnał jest różnicą tych natężeń, wkład od lokalnego oscylatora całkowicie się znosi. Pozostaje jedynie wkład liniowy w  $\mathcal{E}_s$ , pochodzący z interferencji pól  $\mathcal{E}_s$  i  $\mathcal{E}_{LO}$  na dzielniku wiązki. Przyjrzyjmy mu się dokładniej.

Zgodnie z rysunkiem 6.7, w równaniach (2.6a) i (2.6b) przyjmujemy  $\phi_{1t} = \phi_{1r} = \phi_{2t} = 0$ , oraz  $\phi_{2r} = \pi$ , co jest oczywiście zgodne z równaniem (2.8). Lokalny oscylator potraktujemy jako mod wejściowy 1,  $\mathcal{E}_1 = |\mathcal{E}_{LO}| e^{i\phi_{LO}}$ , natomiast pole badane (sygnał) jako mod wejściowy 2,  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_s$ . Mamy więc

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \mathcal{E}_{LO} e^{i\phi_{LO}} + \mathcal{E}_s \right], \\ \mathcal{E}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \mathcal{E}_{LO} e^{i\phi_{LO}} - \mathcal{E}_s \right]. \end{aligned}$$

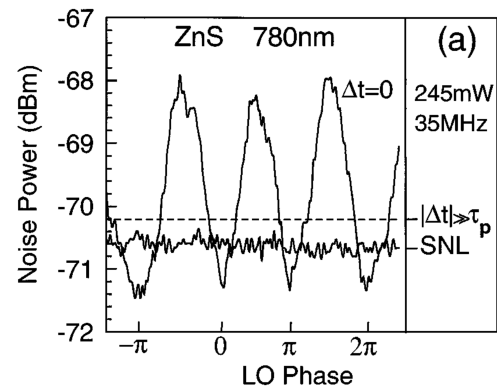
Zapisać zespoloną amplitudę wiązki sygnałowej jako  $\mathcal{E}_s = \tilde{\mathcal{E}}_0 (X_1 + iX_2)$ , gdzie  $\tilde{\mathcal{E}}_0$  jest tu rzeczywistym współczynnikiem proporcjonalności pomiędzy bezwymiarowymi kwadraturami a fizyczną amplitudą pola. Nie podawaliśmy go w tym wykładzie dla pól biegnących, z którymi mamy w tej chwili do czynienia, ale jego dokładna postać jest nieistotna, ponieważ — jak za chwilę zobaczymy — i tak we wszystkich wzorach się on uprości. Elementarny bezpośredni rachunek prowadzi do sygnału detekcji różnicowej w postaci

$$J_1 - J_2 = 2|\mathcal{E}_{LO}|\tilde{\mathcal{E}}_0 (X_1 \cos \phi_{LO} + X_2 \sin \phi_{LO}).$$

Widać więc, że dla  $\phi_{LO} = 0$  (czyli kiedy LO oscyluje jak  $\cos \omega t$ ) sygnał detekcji jest proporcjonalny do pierwszej kwadratury pola  $\mathcal{E}_s$ , a w przypadku  $\phi_{LO} = \pi/2$  (LO oscyluje jak  $\sin \omega t$ ) — do drugiej. Ogólnie wkład do sygnału daje wyłącznie ta kwadratura pola  $\mathcal{E}_s$ , która jest w fazie z lokalnym oscylatorem.

<sup>1</sup> Nazewnictwo pochodzi z techniki radiowej, gdzie słabe oscylacje obwodu elektrycznego wzbudzone przez falę radiową z odległego nadajnika są homodynowane z oscylacjami wzbudzonymi w obwodzie odbiornika (stąd określenie *lokalny*). „Homo-” oznacza „taka sama” i odnosi się do częstotliwości. Istnieje też technika heterodynowa.

Rys. 6.8. Wynik pomiaru szumu dla stanu koherentnego w układzie zrównoważonej detekcji homodynowej. „SNL” jest wynikiem pomiaru dla stanu próżni, który definiuje poziom szumu śrutowego. Linia przerywana wskazuje wartość w sytuacji braku koherencji pomiędzy wiązką LO a sygnałową. Źródło: M. Fox et al., Phys. Rev. Lett. **74**, 1728 (1995). ©1995, American Physical Society.



Jeżeli teraz, tak jak w układzie po prawej stronie rysunku 6.7, odetniemy stałą w czasie średnią wartość sygnału, to moc wydzielana na oporze roboczym  $R_L$  będzie proporcjonalna do średniego kwadratu fluktuacji (szumu) tej kwadratury pola, która jest zgodna w fazie z lokalnym oscylatorem. W przypadku próżni jest to szum śrutowy, którego źródłem są fluktuacje próżni. Jest on jednakowy dla obu kwadratur. W przypadku stanu ścieśnionego w jednej z kwadratur, przy odpowiednim doborze fazy lokalnego oscylatora pomiar homodynowy wykaże szum zmniejszony w porównaniu z poziomem szumu śrutowego. Przykładowy wynik takiego pomiaru przedstawiony jest na rys. 6.8. Widzimy, że dla pewnej wartości fazy wiązki LO mierzona moc szumu jest poniżej poziomu szumu śrutowego, co dowodzi ścieśnienia kwadraturowego badanej wiązki. Warto zwrócić uwagę na cechowanie wartości sygnału w tym eksperymencie. Mamy porównać szum w wybranej kwadraturze z szumem próżni, musimy więc wyznaczyć poziom szumu próżni w tym samym układzie eksperymentalnym, bo *a priori* nie wiadomo, jaka jest jego wartość. Jedną z metod jest usunięcie źródła stanu ścieśnionego z wejścia układu (czyli zastąpienie go próżnią). W efekcie mierzymy szum śrutowy, oznaczony na wykresie „SNL”. Teoretycznie ten sam wynik powinno się uzyskać, jeśli faza LO jest losowa w stosunku do fazy wiązki sygnałowej, co można uzyskać wprowadzając duże opóźnienie pomiędzy wiązkami (znacznie większe od czasu koherencji) — przerywana linia na wykresie. Jak widać, w rzeczywistym eksperymencie wartości uzyskane na te dwa sposoby nieco się różnią, co wynika z niedoskonałości układu (powodem może być np. dodatkowy szum wprowadzony do wiązki sygnałowej).

### 6.3.3. Wytwarzanie stanów ścieśnionych kwadraturowo

W tym rozdziale zobaczymy, że stany ścieśnione kwadraturowo pojawiają się w wyniku procesów zachodzących w ośrodkach nieliniowych. Najpierw musimy przypomnieć sobie podstawy optyki nieliniowej w bardzo uproszczonym modelu. Nie jest on co prawda całkowicie realistyczny, ale właściwie ujmuje istotę fizycznego efektu, o który nam chodzi.

Fale elektromagnetyczne w ośrodku nieliniowym

Punktem wyjścia są równania Maxwella w ośrodku, w którym nie występują ładunki ani prądy swobodne,

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{pol}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \quad (6.17)$$

gdzie  $\mathbf{j}_{\text{pol}}$  jest prądem polaryzacji<sup>2</sup>, który wiąże się z wektorami polaryzacji relacją  $\mathbf{j}_{\text{pol}} = \dot{\mathbf{P}}$ . Polaryzację ośrodka rozdzielamy na część liniową i nieliniową  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(L)} + \mathbf{P}^{(NL)}$ , przy czym  $\mathbf{P}^{(L)} = \epsilon_0 \chi \mathcal{E}$ . Bezwymiarowy współczynnik  $\chi$  jest podatnością elektryczną ośrodka. Zakładamy tu dla uproszczenia, że ośrodek jest izotropowy, a więc wektor polaryzacji jest współliniowy z  $\mathcal{E}$

<sup>2</sup> Definicje pojęć i podstawowy elektrodynamiki w ośrodkach materialnych znaleźć można w podręcznikach elektrodynamiki (np. D. J. Griffiths, *Podstawy Elektrodynamiki*) lub w dobrych podręcznikach fizyki ogólnej (np. I. W. Sawieliew, *Wykłady z fizyki*).

(rzeczywiste ośrodki nieliniowe są anizotropowe). Biorąc rotację z pierwszego z równań (6.17) i zmieniając kolejność pochodnych po prawej stronie dostajemy

$$\nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \dot{\mathbf{P}}^{(L)} + \mu_0 \dot{\mathbf{P}}^{(NL)} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}, \quad (6.18)$$

gdzie podstawiliśmy  $\nabla \times \mathbf{B}$  z drugiego równania i wyraziliśmy prąd polaryzacji przez polaryzację. Po lewej stronie równania (6.18) korzystamy z tożsamości

$$\nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) = \nabla \nabla \cdot \mathcal{E} - \nabla^2 \mathcal{E} = -\nabla^2 \mathcal{E},$$

gdzie skorzystaliśmy z prawa Gaussa  $\nabla \cdot \mathcal{E} = 0$  wobec braku gęstości ładunku w ośrodku. Po prawej stronie wyrażamy liniową polaryzację przez pole elektryczne i podatność i grupujemy z ostatnim wyrazem. Dostajemy w ten sposób

$$\nabla^2 \mathcal{E} = \frac{n^2}{c^2} \ddot{\mathcal{E}} + \mu_0 \ddot{\mathbf{P}}^{(NL)}, \quad (6.19)$$

gdzie wprowadziliśmy współczynnik załamania  $n = \sqrt{1 + \chi}$ . Oczywiście pod nieobecność polaryzacji nieliniowej jest to równanie falowe dla ośrodka dielektrycznego o współczynniku załamania  $n$ .

Generacja stanu ścięśnionego w procesie wzmocnienia parametrycznego

Od tego momentu będziemy dla uproszczenia zakładać, że pole ma ustaloną polaryzację liniową, i pominiemy zapis wektorowy. Rozważamy ośrodek nieliniowy, w którym propaguje silna wiązka (wiązką pompującą) o częstotliwości  $2\omega$  i amplitudzie  $\mathcal{E}_p$  oraz wiązka sygnałowa o częstotliwości  $\omega$  i amplitudzie  $\mathcal{E}_s$ . W procesie nieliniowym następuje wymiana energii pomiędzy modami pola, a więc amplitudy poszczególnych wiązek będą się zmieniać. Przyjmijmy, że wszystkie wiązki propagują w kierunku  $z$ . Interesująca nas składowa pola ma więc postać

$$\mathcal{E}^\omega(z, t) = \mathcal{E}_s(z) e^{i(k_s z - \omega t)}.$$

Zmiany amplitudy  $\mathcal{E}_s(z)$  występują na odległościach znacznie większych od długości fali. Oznacza to, że zmiana amplitudy pola na odległości równej długości fali jest znacznie mniejsza od wartości tego natężenia, a więc

$$\left| \frac{d\mathcal{E}_s}{dz} \lambda \right| \ll |\mathcal{E}_s|.$$

Ponieważ  $\lambda = 2\pi/k$ , można to zapisać jako

$$\left| \frac{d\mathcal{E}_s}{dz} \right| \ll |k\mathcal{E}_s|.$$

Różniczkując po  $z$  mamy stąd

$$\left| \frac{d^2 \mathcal{E}_s}{dz^2} \right| \ll \left| k \frac{d\mathcal{E}_s}{dz} \right|. \quad (6.20)$$

Wraz z polami  $\mathcal{E}_p$  i  $\mathcal{E}_s$  w ośrodku występują również pola o innych częstotliwościach (sumarycznych i różnicowych). Równanie (6.19) musi być spełnione dla każdej z tych składowych Fourierskich z osobna. Zapiszemy je dla pola o częstotliwości  $\omega$  i amplitudzie  $\mathcal{E}_s$  (czyli dla interesującej nas wiązki sygnałowej), a konkretnie dla składowej tego pola o częstotliwości dodatniej. Równanie (6.19) dla wiązki sygnałowej można zapisać w postaci

$$\left( -k_s^2 \mathcal{E}_s + 2ik_s \frac{d\mathcal{E}_s}{dz} + \frac{d^2 \mathcal{E}_s}{dz^2} \right) e^{i(k_s z - \omega t)} = -\frac{n^2}{c^2} \omega^2 \mathcal{E}_s e^{i(k_s z - \omega t)} + \mu_0 \ddot{\mathbf{P}}^{(NL)}.$$



Wobec równania (6.20) zaniedbujemy ostatni wyraz w nawiasie po lewej stronie. Zauważamy ponadto, że w ośrodku o współczynniku załamania  $n$  relacja dyspersyjna ma postać  $\omega = k_s c/n$ , a więc pierwszy wyraz po lewej stronie znosi się z pierwszym wyrazem po prawej. Dostajemy ostatecznie równanie propagacji

$$2in\omega \frac{d\mathcal{E}_s}{dz} = \frac{1}{c\epsilon_0} \ddot{P}^{(NL)}, \quad (6.21)$$

gdzie po lewej stronie podstawiliśmy  $k_s = n\omega/c$ , a po prawej  $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$ . Przyjmijmy, że w rozważanym ośrodku występuje nieliniowość drugiego rzędu, a więc

$$P^{(NL)} = \epsilon_0 \chi_2 \left( \mathcal{E}_p e^{i(k_p z - 2\omega t)} + \mathcal{E}_s e^{i(k_s z - \omega t)} + \text{c.c.} + \dots \right)^2.$$

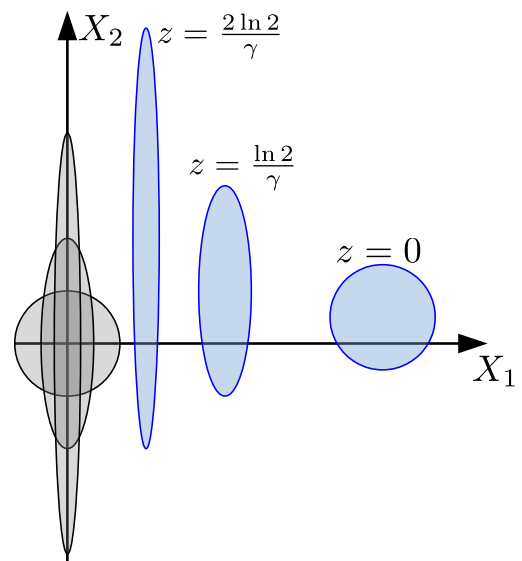
Po prawej stronie pominięto nieistotne składowe Fourierowskie pola. Ze wszystkich składników, które pojawiają się po prawej stronie tego równania, interesują nas tylko wyrazy o częstości  $\omega$  (takiej jak po lewej stronie równania). Jest tylko jeden taki wyraz, mianowicie  $\mathcal{E}_p \mathcal{E}_s^* e^{i[(k_p - k_s)z - \omega t]}$ . Przyjmijmy, że pola  $\mathcal{E}_p$  i  $\mathcal{E}_s$  spełniają warunek zgodności fazy<sup>3</sup>, a więc  $2k_s = k_p$ . Podstawiając do równania (6.21) i upraszczając czynnik falowy dostajemy

$$\frac{d\mathcal{E}_s}{dz} = \frac{i}{2nc} \omega \chi_2 \mathcal{E}_p \mathcal{E}_s^*. \quad (6.22)$$

Przyjmijmy, że faza pola wiązki pompującej wynosi  $\pm\pi/2$ , czyli  $\mathcal{E}_p = \pm i|\mathcal{E}_p|$  i oznaczmy  $\omega|\mathcal{E}_p|\chi_2/(2nc) = \gamma > 0$ . Ubytek energii wiązki pompującej jest zaniedbywalny, więc jej amplituda jest stała i współczynnik  $\gamma$  można uważać za stały. Zespoloną amplitudę wiązki sygnałowej rozkładamy na amplitudy kwadratur,  $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_s^{(1)} + i\mathcal{E}_s^{(2)}$  i po podstawieniu do równania (6.22) przyrównujemy części rzeczywiste i urojone. Dostajemy

$$\frac{d\mathcal{E}_s^{(1)}}{dz} = \mp\gamma\mathcal{E}_s^{(1)}, \quad \frac{d\mathcal{E}_s^{(2)}}{dz} = \pm\gamma\mathcal{E}_s^{(2)}.$$

Widać, że dla fazy wiązki pompującej równej  $\pi/2$  (górny znak) pierwsza kwadratura jest tłumiona, a druga narasta, natomiast dla fazy  $-\pi/2$  jest odwrotnie. Ponieważ bezwymiarowe amplitudy



Rys. 6.9. Ewolucja stanu próżni (szary) i stanu koherentnego (niebieski) w zależności od drogi propagacji w kryształach nieliniowych w procesie optycznego wzmocnienia parametrycznego.

<sup>3</sup> W rzeczywistości kryształ ma pewną dyspersję, więc dla pól o częstościach  $\omega$  i  $2\omega$  warunek taki w ogólności nie zachodzi (fala o podwójnej liczbie falowej nie będzie miała podwójnej częstości). Można go spełnić tylko przy określonych kierunkach propagacji i polaryzacjach, wykorzystując dwójłomność kryształu. Zgodność fazowa występuje w danej geometrii tylko dla jednej częstości, stąd właśnie można sensownie rozważać jedynie pola o częstościach  $\omega$  i  $2\omega$ .

kwadratur wiązki sygnałowej  $X_{1,2}$  są proporcjonalne do amplitud  $\mathcal{E}_s^{(1,2)}$ , możemy rozwiązanie otrzymanych równań zapisać w postaci

$$X_1(z) = X_1(0)e^{\mp\gamma z}, \quad X_2(z) = X_2(0)e^{\pm\gamma z}.$$

Średnie wartości kwadratur zmieniają się wzdłuż drogi propagacji w taki sam sposób:

$$\langle X_1(z) \rangle = \langle X_1(0) \rangle e^{\mp\gamma z}, \quad \langle X_2(z) \rangle = \langle X_2(0) \rangle e^{\pm\gamma z}.$$

Podobnie zmieniają się fluktuacje:

$$(\Delta X_1(z))^2 = \langle X_1^2(z) \rangle - \langle X_1(z) \rangle^2 = \langle X_1^2(0) e^{\mp 2\gamma z} \rangle - \langle X_1(0) e^{\mp\gamma z} \rangle^2 = e^{\mp 2\gamma z} (\Delta X_1(0))^2$$

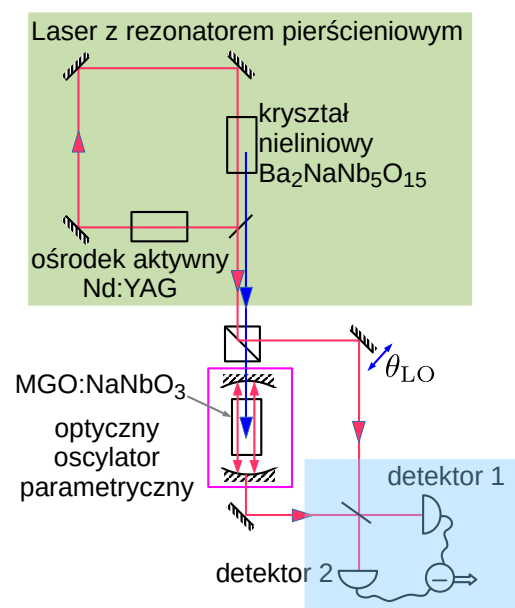
oraz, analogicznie,

$$(\Delta X_2(z))^2 = e^{\pm 2\gamma z} (\Delta X_2(0))^2.$$

Widać więc, że początkowy stan wiązki sygnałowej ulega ścięśnieniu w jednej z kwadratur<sup>4</sup>. W szczególnym przypadku, gdy pole sygnałowe jest w stanie próżni, jego średnia pozostaje zerowa natomiast fluktuacje jednej z kwadratur ulegają redukcji; otrzymujemy więc ścięśnioną próżnię. Ewolucja stanu koherentnego i stanu próżni w omawianym procesie nieliniowym zilustrowana jest na rysunku 6.9.

#### 6.3.4. Stany ścięśnione – realizacja eksperymentalna

Rysunek 6.10 przedstawia przykład układu eksperymentalnego, w którym zrealizowano generację i detekcję stanów ścięśnionych<sup>5</sup>. W optyce nie jest praktycznie możliwa realizacja rzeczywiście *lokalnego* oscylatora, tzn. układu generującego wiązkę optyczną o zadanej częstotliwości i ustalonej relacji fazowej z wiązką sygnałową. W realizacji eksperymentalnej obie wiązki muszą pochodzić z tego samego źródła (lasera). W układzie na rysunku 6.10 użyto lasera z rezonatorem pierścieniowym (zielony blok na schemacie), w którym ośrodkiem aktywnym jest Nd:YAG (kryształ granatu itrowo-aluminiowego domieszkowany neodymem, powszechnie używany w laserach), a rezonator tworzą cztery lustra, z których jedno ma niezerowy współczynnik transmisji umożliwiający emisję wiązki laserowej z układu.

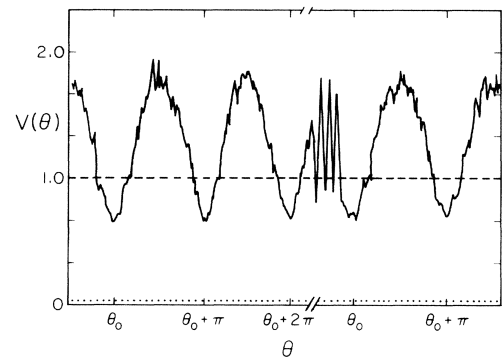


Rys. 6.10. Układ do wytwarzania i detekcji światła ścięśnionego w parametrycznym procesie nieliniowym drugiego rzędu. Czerwone i niebieskie linie wskazują bieg wiązek o częstotliwości, odpowiednio,  $\omega$  i  $2\omega$ . Ze schematu usunięto elementy nieistotne dla naszej dyskusji. Adaptacja rysunku z artykułu L. A. Wu *et al.*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2520 (1986).

<sup>4</sup> Dla dowolnego wyboru fazy ścięśnianie następowałoby w pewnej „obróconej” kwadraturze, będącej liniową kombinacją bazowych kwadratur  $X_1$  i  $X_2$ , jak wspomniano w rozdziale 6.3.1.

<sup>5</sup> L. A. Wu *et al.*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2520 (1986)

Rys. 6.11. Wynik pomiaru mocy szumu w zależności od wyboru kwadratury (fazy lokalnego oscylatora) w układzie z poprzedniego rysunku. Linia przerywana oznacza poziom szumu śrutowego (próżnia na wejściu sygnałowym). Źródło: L. A. Wu *et al.*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2520 (1986). ©American Physical Society.



Ścieśniona wiązka sygnałowa ma częstość obniżoną o połowę w stosunku do wiązki pompującej, a lokalny oscylator w układzie detekcji homodynowej, który musi być silną wiązką laserową, ma mieć częstość taką samą jak wiązka sygnałowa. Tymczasem, gdyby użyć jednej wiązki laserowej jako pompującej i jako lokalnego oscylatora, to częstości lokalnego oscylatora i sygnału byłyby oczywiście różne. Rozwiązuje się to w ten sposób, że do pompowania procesu wzmocnienia parametrycznego używa się wiązki o podwojonej częstości, która jest zgodna fazowo z wiązką, która ma odgrywać rolę lokalnego oscylatora. W tym celu w rezonatorze pierścieniowym lasera umieszcza się nieliniowy kryształ  $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ , w którym następuje podwojenie częstości. Na rysunku 6.10 wiązki o częstości wiązki sygnałowej ( $\omega$ ) oznaczono na czerwono, a wiązki o częstości wiązki pompującej ( $2\omega$ ) – na niebiesko. W eksperymencie były to wiązki o długości fali  $1,06 \mu\text{m}$  i  $0,53 \mu\text{m}$ . Wiązka o częstości  $\omega$  jest następnie prowadzona poprzez element opóźniający (wydłużający drogę optyczną) w postaci przesuwanego lustra, oznaczonego  $\theta_{LO}$ , który pozwala regulować fazę wiązki.

Wiązka o podwojonej częstości użyta jest do pompowania optycznego oscylatora parametrycznego (różowa ramka na schemacie), w którym analizowany przez nas powyżej proces wzmocnienia parametrycznego zachodzi w kryształ nieliniowym  $\text{MgO}:\text{LiNbO}_3$  (niobian litu domieszkowany tlenkiem azotu) w rezonatorze optycznym, który działa jak laser, w którym pompowanie modu laserowego następuje przez proces nieliniowy, a nie w wyniku inwersji obsadzeń. Generacja stanów ścieśnionych jest zresztą jednym ze standardowych zastosowań optycznych oscylatorów parametrycznych.

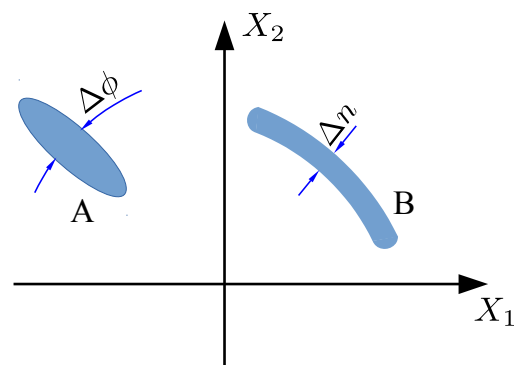
Powstała w oscylatorze parametrycznym wiązka sygnałowa interferuje z wiązką lokalnego oscylatora na dzielniku wiązki, który jest częścią układu detekcji (kolor błękitny na schemacie) omawianego już wcześniej.

Wynik pomiaru dokonanego w tym układzie przedstawiony jest na rysunku 6.11. Jak widać, dla jednej z kwadratur, wybranej poprzez odpowiedni dobór fazy lokalnego oscylatora, mierzony poziom szumu jest poniżej wartości próżniowej.

Generowanie światła ścieśnionego możliwe jest też w procesach nieliniowych trzeciego rzędu, których nie będziemy tu omawiać szczegółowo. Wynik pomiaru przedstawiony na rysunku 6.8 pochodzi właśnie z takiego eksperymentu.

### 6.3.5. Stany ścieśnione amplitudowo i fazowo

Poza ścieśnianiem kwadraturowym formalnie możliwe jest też ścieśnianie amplitudowe, czyli redukcja fluktuacji liczby fotonów poniżej wartości  $\Delta n = \bar{n}$  charakterystycznej dla stanu koherentnego, oraz ścieśnianie fazowe, czyli redukcja fluktuacji fazy. Graficzne reprezentacje takich stanów przedstawione są na rysunku 6.12. Ścieśnienie amplitudowe powoduje zwiększenie fluktuacji fazy, a ścieśnienie fazowe — zwiększenie fluktuacji liczby fotonów. W przypadku ścieśniania amplitudowego mamy po prostu do czynienia ze stanami o statystyce pod-Poissonowskiej, które omawialiśmy już w rozdziale 4. Stanów ścieśnionych fazowo nie udało się dotąd zaobserwować eksperymentalnie.



Rys. 6.12. Stan ściężniony fazowo (A) i amplitudowo (B).

W tym rozdziale pokażemy, że fluktuacje próżni (szum śrutowy) definiują ograniczenie rozdzielczości standardowej interferometrii (pierwszego rzędu), które można pokonać stosując stany ścięśnione. Nie jest to zagadnienie czysto akademickie: w ostatnim czasie technika interferometrii z wykorzystaniem ścięśnionej próżni została wykorzystana do detekcji fal grawitacyjnych<sup>1</sup>. Tu omówimy najpierw najprostszy schemat pomiaru interferometrycznego w układzie interferometru Macha-Zendera i zdefiniujemy pojęcia czułości i rozdzielczości takiego pomiaru. Następnie zbadamy wpływ szumu na rozdzielczość interferometru i wykażemy, że na fundamentalnym poziomie (czyli pomijając techniczne niedoskonałości układu) pochodzi on z fluktuacji jednej z kwadratur próżni na klasycznie „nieużywanym” porcie wejściowym interferometru.

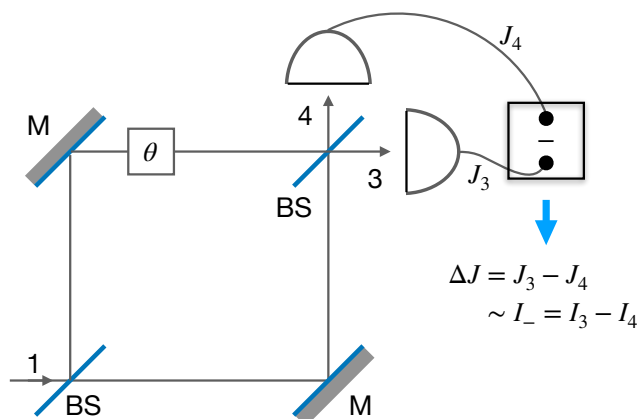
### 7.1. Prosty pomiar interferometryczny

Celem pomiaru jest wyznaczenie bardzo małego przesunięcia fazowego wiązki, które może być związane z niewielką zmianą współczynnika załamania, nieznaczną zmianą drogi geometrycznej (np. związanej z nierównością powierzchni, od której odbija się światło), albo modulacją własności metrycznych czasoprzestrzeni przez przebiegającą falę grawitacyjną. Faza nie jest jednak obserwowana bezpośrednio, a w optyce kwantowej nie odpowiada jej nawet wprost obserwabla. Techniki interferometryczne polegają więc na konwersji przesunięcia fazowego na sygnał natężeniowy poprzez interferencję wiązki o przesuniętej fazie z wiązką odniesienia.

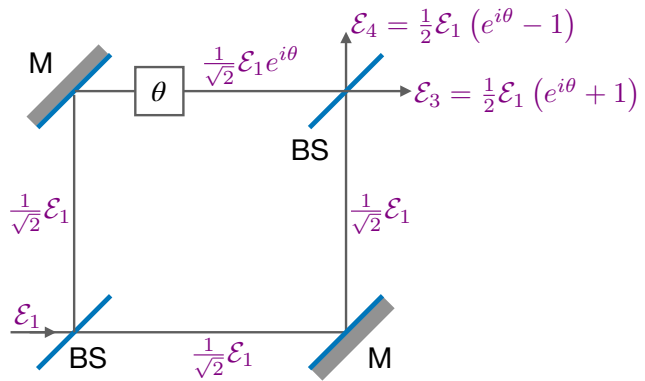
Przykład takiego układu pomiarowego przedstawia rysunek 7.1. W tym przypadku wykorzystano interferometr Macha-Zendera, w którym badane przesunięcie fazy występuje w jednym z ramion (blok z oznaczeniem  $\theta$ ). Sygnałem pomiarowym jest różnica fotoprądów z detektorów umieszczonych w portach wyjściowych, proporcjonalna do różnicy natężeń wiązek wychodzących (jest to schemat detekcji zrównoważonej, znany nam już z rozdziału 4.4).

W klasycznym podejściu na jedno z wejść interferometru (u nas wejście 1) pada wiązka laserowa, podczas gdy drugie wejście nie jest wykorzystywane. Propagację wiązek opisuje rysunek 7.2. Przy przejściu wiązek przez dzielniki wiązki dwukrotnie stosujemy reguły (2.6a) i (2.6b)

Rys. 7.1. Układ do interferometrycznego pomiaru przesunięcia fazowego wykorzystujący interferometr Macha-Zendera i schemat pomiaru zrównoważonego. Mierzone przesunięcie fazy ma miejsce w górnym ramieniu interferometru. Na rysunku zdefiniowano numerację wejść i wyjść interferometru.



<sup>1</sup> Patrz artykuły M. Tse *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **123**, 231107 (2019) oraz F. Acernese *et al.* (Virgo Collaboration) *Phys. Rev. Lett.* **123**, 231108 (2019). Dostępne jest również omówienie na bardziej popularnym poziomie.



Rys. 7.2. Propagacja pola z portu wejściowego 1 w interferometrze Macha–Zendera.

oraz relację (2.8), wybierając  $\phi_{1t} = \phi_{1r} = \phi_{2t} = 0$ , oraz  $\phi_{2r} = \pi$ . W jednym z ramion wiązka doznaje przesunięcia fazowego, co w naszym zapisie zespolonym odpowiada dodatkowemu czynnikowi fazowemu  $e^{i\theta}$ . Prosta analiza polegająca na zastosowaniu równania (2.8) kolejno do każdego interferometru prowadzi do amplitud pól na portach wyjściowych jak na rysunku 7.2 (wejściem „1” jest zawsze wejście po lewej stronie, a wejściem „2” — wejście od dołu). Natężenia wiązek na wyjściach wynoszą więc

$$I_3 = \mathcal{E}_3^* \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad I_4 = \mathcal{E}_4^* \mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

skąd otrzymujemy sygnał wyjściowy

$$I_- = I_3 - I_4 = \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 \cos \theta = I_1 \cos \theta, \quad (7.1)$$

gdzie  $I_1 = \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1$  jest natężeniem wiązki wejściowej.

W analizie pomiaru kluczowe są dwa pojęcia: *czułości* (ang. *sensitivity*) i *rozdzielczości* (ang. *resolution*). Przez czułość przyrządu rozumiemy zmianę sygnału w stosunku do zmiany wielkości mierzonej. W naszym przypadku

$$S(\theta) = \left| \frac{d}{d\theta} I_- \right| = I_1 |\sin \theta|.$$

Poza wzrostem czułości wraz z mocą wiązki (która jest z różnych względów ograniczona), czułość zależy od wartości przesunięcia fazowego, przy którym prowadzimy eksperyment. Jak wiadać, aby uzyskać najwyższą czułość dostępną przy danej mocy wiązki, należy ustawić w interferometrze  $\theta = \pm\pi/2$  (np. poprzez wydłużenie jednego z ramion o ćwierć długości fali) i mierzyć przesunięcie fazy względem tego wstępnego ustawienia. Wybierzmy znak „-”, a więc

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + \delta\theta,$$

gdzie  $\delta\theta$  jest mierzonym przesunięciem fazy. Interesuje nas pomiar bardzo małych przesunięć fazowych, a więc  $\delta\theta \ll 1$ , stąd

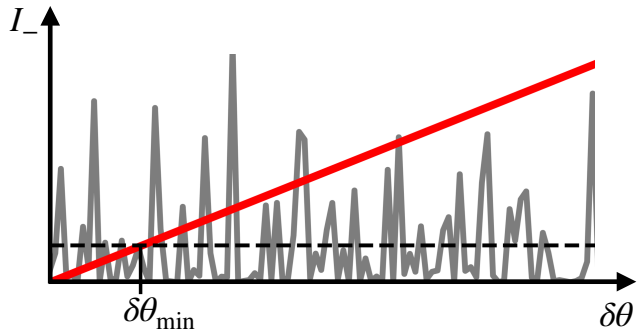
$$\cos \theta = \delta\theta + \mathcal{O}[(\delta\theta)^3] \quad \text{i} \quad \sin \theta \approx -1 + \mathcal{O}[(\delta\theta)^2]. \quad (7.2)$$

W tym zakresie mamy więc  $I_- \approx I_1 \delta\theta$ , a więc sygnał jest proporcjonalny do mierzonego przesunięcia fazowego.

Rozdzielczość przyrządu to z kolei najmniejsza wartość mierzonej wielkości, jaką można jeszcze odróżnić od szumu. Typową sytuację eksperymentalną (nie tylko w omawianym to eksperymencie) przedstawia rysunek 7.3. Kluczową rolę odgrywa składowa szumu, która jest niezależna od wartości mierzonej wielkości. Wobec proporcjonalności sygnału (tu  $I_-$ ) do wielkości mierzonej (tu  $\delta\theta$ ), przy pewnej wartości tej wielkości wartość sygnału (czerwona linia na rysunku) staje się mniejsza od średniej amplitudy szumu (czarna przerywana linia) i pomiar staje się niemożliwy. Tę najmniejszą wartość, jaką jeszcze można zmierzyć, oznaczoną tu  $\delta\theta_{\min}$ , nazywamy właśnie rozdzielczością przyrządu. Wykażemy teraz, że kwantowe fluktuacje pola prowadzą do pojawienia się pewnego fundamentalnego poziomu szumu, a więc wyznaczają granicę rozdzielczości pomiaru interferometrycznego.



Rys. 7.3. Rozdzielczość pomiaru przesunięcia fazowego. Szara linia przedstawia szum. Czarna na przerywana linia wskazuje wartość średnią szumu. Czerwona linia to sygnał urządzenia pomiarowego ( $I_-$ ) w zależności od mierzonej wielkości ( $\delta\theta$ ). Zaznaczono najmniejszą mierzalną wartość, czyli rozdzielczość pomiaru,  $\delta\theta_{\min}$ .



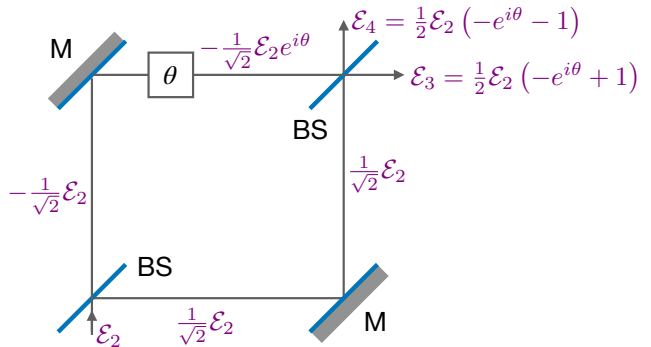
## 7.2.

## Standardowa granica kwantowa w interferometrii

Jak widzieliśmy w rozdziale 4, z samej kwantowej (fononowej) natury światła wynika pewien fundamentalny poziom szumu w sygnale fotodetekcji (szum śrutowy) będący przejawem kwantowych fluktuacji pola. Zbadamy teraz wpływ różnych składowych takich fluktuacji pól na wejściach interferometru na poziom szumu pojawiającego się na wyjściu z układu detekcji zrównoważonej. W świetle dyskusji z poprzedniego rozdziału interesuje nas szum niezależny od wartości przesunięcia fazy.

Można by naiwnie oczekiwać, że źródłem szumu w sygnale pomiarowym są fluktuacje wiązki użytej w pomiarze interferometrycznym. Przekonajmy się, że tak nie jest. Zapiszmy pole na wejściu interferometru w postaci  $\mathcal{E}_1 = \bar{\mathcal{E}}_1 + \Delta\mathcal{E}_1$ , gdzie  $\bar{\mathcal{E}}_1$  jest wartością średnią, a  $\Delta\mathcal{E}_1$  — fluktuacją, przy czym  $\langle \Delta\mathcal{E}_1 \rangle = 0$ . Wtedy  $\langle \bar{\mathcal{E}}_1^* \Delta\mathcal{E} \rangle = \bar{\mathcal{E}}_1^* \langle \Delta\mathcal{E}_1 \rangle = 0$ , a więc  $\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 = \bar{\mathcal{E}}_1^* \bar{\mathcal{E}}_1 + \langle \Delta\mathcal{E}_1^* \Delta\mathcal{E}_1 \rangle$ , a sygnał — zgodnie z równaniem (7.1) — nadal jest proporcjonalny do  $\delta\theta$ , z nieznacznie zmodyfikowanym współczynnikiem. Zwróćmy przy tym uwagę, że  $\mathcal{E}_1$  jest silnym polem koherentnym, a  $\Delta\mathcal{E}_1$  jest fluktuacją pola w takim stanie, która jest taka sama jak fluktuacja pola w stanie próżni, a więc niemiernie mała. Poprawka związana z fluktuacjami jest więc zanedbywalna.

Rys. 7.4. Propagacja pola z portu wejściowego 2 w interferometrze Macha–Zendera.



Zobaczmy teraz, że istotna składowa szumu pochodzi z drugiego portu wejściowego interferometru. Z klasycznego punktu widzenia jest on nieużywany. W języku kwantowym oznacza to, że pole na tym wejściu jest w stanie próżni. Wiemy jednak, że pole elektryczne w stanie próżni nie jest zerowe ze względu na fluktuacje próżni. Aby zbadać wpływ fluktuacji próżni na drugim porcie wejściowym interferometru, a także umożliwić sobie analizę sytuacji w przypadku ogólniejszych pól na tym wejściu, zbadajmy propagację pola z tego wejścia przez interferometr Macha-Zendera. Wynik analizy przedstawiony jest na rysunku 7.4. Zgodnie z zasadą superpozycji, łączne pole na wyjściach, w obecności pól na obu wejściach interferometru, równe jest sumie odpowiednich pól z rysunku 7.2 i rysunku 7.4. Po prostych algebraicznych przekształceniach mamy więc

$$\mathcal{E}_3 = e^{i\theta/2} \left[ \mathcal{E}_1 \cos \frac{\theta}{2} - i\mathcal{E}_2 \sin \frac{\theta}{2} \right], \quad \mathcal{E}_4 = e^{i\theta/2} \left[ i\mathcal{E}_1 \sin \frac{\theta}{2} - \mathcal{E}_2 \cos \frac{\theta}{2} \right]. \quad (7.3)$$

Natężenia wiązek na wyjściach wynoszą więc

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_3^* \mathcal{E}_3 &= \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \operatorname{Re} i \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \mathcal{E}_4^* \mathcal{E}_4 &= \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \operatorname{Re} i \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznych oraz z przybliżeń danych równaniem (7.2) dla małych przesunięć fazy znajdujemy

$$\mathcal{E}_3^* \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4^* \mathcal{E}_4 = (\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2) \delta\theta + 2 \operatorname{Re} i \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^*. \quad (7.4)$$

Widzimy, że wartość sygnału różnicowego na wyjściu interferometru rozkłada się na składową proporcjonalną do wielkości mierzonej (*sygnał*) i składową niezależną od wielkości mierzonej (*szum*).

Zacznijmy od analizy sygnału. W optyce kwantowej nieuniknione są fluktuacje wielkości fizycznych (związane z kwantowymi nieoznaczonościami obserwabli), więc mierzone wielkości zawsze wyrażają się przez średnie. Sygnał pomiarowy równy jest

$$I_-(\delta\theta) = (\langle \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 \rangle - \langle \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2 \rangle) \delta\theta, \quad (7.5)$$

a więc fluktuujące pole na drugim wejściu obniża czułość przyrządu. Jeśli jednak pole  $\mathcal{E}_2$  jest w stanie próżni, a na pierwszym wejściu mamy silne pole koherentne, to  $\langle \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2 \rangle \ll \langle \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 \rangle \approx |\bar{\mathcal{E}}|^2$ , więc wpływ fluktuacji próżni na czułość jest znowu zaniedbywalny.

Zajmijmy się teraz wpływem fluktuacji pola  $\mathcal{E}_2$  na czułość analizowanego przyrządu. W ostatnim wyrażeniu po prawej stronie równania (7.4), opisującym szum, piszemy  $\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* = (\bar{\mathcal{E}}_1 + \Delta \mathcal{E}_1) \mathcal{E}_2^*$ . Ograniczymy się tu do pól  $\mathcal{E}_2$  o zerowej średniej (np. próżnia, ściętniona próżnia) i zakładamy, że fluktuacje pola na pierwszym wejściu są niezależne od pola na drugim wejściu<sup>2</sup>, czyli  $\langle \Delta \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* \rangle = 0$ , a więc  $\langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* \rangle = \langle \bar{\mathcal{E}}_1 \mathcal{E}_2^* \rangle = \bar{\mathcal{E}}_1 \langle \mathcal{E}_2^* \rangle = 0$  i średnia wartość szumu jest zerowa, czyli mamy do czynienia z typowymi fluktuacjami wokół zerowej wartości średniej. Ponieważ istotne mogą być jedynie różnice faz, możemy dowolnie ustalić fazę koherentnego pola  $\bar{\mathcal{E}}_1$ . Przyjmijmy więc, że  $\bar{\mathcal{E}}_1 \in \mathbb{R}$ . Miarą poziomu szumu, który mamy wyznaczyć, jest odchylenie standardowe niezależnej od  $\delta\theta$  składowej sygnału detekcji (ostatni wyraz w równaniu (7.4) i linia przerywana na rysunku 7.3), która wobec zerowej wartości średniej równa jest

$$\Delta(2 \operatorname{Re} i \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^*) = \left[ \left\langle (2 \operatorname{Re} i \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^*)^2 \right\rangle - \langle 2 \operatorname{Re} i \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* \rangle^2 \right]^{1/2} \approx \left\langle (2 \operatorname{Re} i \bar{\mathcal{E}}_1 \mathcal{E}_2^*)^2 \right\rangle^{1/2} = 2 \bar{\mathcal{E}}_1 \left\langle (\operatorname{Im} \mathcal{E}_2^*)^2 \right\rangle^{1/2}, \quad (7.6)$$

gdzie pominęliśmy fluktuacje pola  $\mathcal{E}_1$ , które są zaniedbywalne w porównaniu z jego wartością średnią.

Dalszą dyskusję wygodnie jest prowadzić w języku bezwymiarowych amplitud kwadratur. Zespoloną amplitudę pola  $\mathcal{E}_2$  rozkładamy na część rzeczywistą i zespoloną które są odpowiednio proporcjonalne do amplitud kwadratur (rozd. 2.1), a więc także do bezwymiarowych kwadratur  $X_1$  i  $X_2$  (rozdział 6.1),

$$\operatorname{Re} \mathcal{E}_2 = \tilde{\mathcal{E}}_0 X_{2,1}, \quad \operatorname{Im} \mathcal{E}_2 = \tilde{\mathcal{E}}_0 X_{2,2}.$$

Tu pierwszy indeks numeruje pole a drugi kwadraturę, natomiast  $\tilde{\mathcal{E}}_0$  jest współczynnikiem proporcjonalności złożonym ze stałych fizycznych oraz częstości, jak w rozdziale 6.3.2. Moc wiązki wynosi oczywiście  $\mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2 = \tilde{\mathcal{E}}_0^2 (X_{2,1}^2 + X_{2,2}^2)$ . Ponieważ założyliśmy, że  $\mathcal{E}_1$  jest polem koherentnym o fazie 0, mamy  $\bar{\mathcal{E}}_1 = \tilde{\mathcal{E}}_0 \alpha = \tilde{\mathcal{E}}_0 |\alpha|$ , bo  $\alpha = |\alpha| e^{i\phi}$ , a  $\phi = 0$ .

<sup>2</sup> W ten sposób wykluczamy możliwość, że na tych wejściach pojawiają się splątane fotony, co prowadziło do niezwykle ciekawej teorii interferometrii na stanach splątanych, która niestety nie mieści się w zakresie tego kursu.

Teraz możemy wyznaczyć rozdzielczość  $\delta\theta_{\min}$  z warunku  $I_-(\delta\theta_{\min}) = \Delta(2 \operatorname{Re} i\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2^*)$ , czyli

$$\delta\theta_{\min} = \frac{2\bar{\mathcal{E}}_1 \langle (\operatorname{Im} \mathcal{E}_2^*)^2 \rangle^{1/2}}{\langle \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 \rangle - \langle \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2 \rangle} = \frac{2|\alpha| \langle X_{2,2}^2 \rangle^{1/2}}{|\alpha|^2 - \langle X_{2,1}^2 + X_{2,2}^2 \rangle}, \quad (7.7)$$

gdzie ponownie pominęliśmy fluktuacje pola  $\mathcal{E}_1$ . W standardowym przypadku pole na porcie wejściowym 2 jest w stanie próżni. Wtedy  $\langle X_{2,1}^2 \rangle = \langle X_{2,2}^2 \rangle = 1/4 \ll |\alpha|^2$  i

$$\delta\theta_{\min} = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \quad (\text{standardowa granica kwantowa}),$$

gdzie  $\bar{n} = |\alpha|^2$  jest średnią liczbą fotonów stanie  $\alpha$  (w jakimś ustalonym segmencie wiązki). Dla silnych pól obowiązuje spodziewamy się jednak ograniczenia relacją nieoznaczoności  $\Delta\phi\Delta n \gtrsim 1$ , a nieoznaczoność liczby fotonów dla odpowiednio dobranego stanu pola może być rzędu średniej liczby fotonów  $\bar{n}$ . Z fundamentalnego punktu widzenia powinno się więc dać wyznaczyć fazę z dokładnością do  $\sim 1/\bar{n}$ , a więc znacznie dokładniej niż  $\sim 1/\sqrt{\bar{n}}$ . Równanie (7.7) wskazuje, jak należy to zrobić: skoro rozdzielczość pomiaru jest ograniczona szumem tylko jednej kwadratury próżni na drugim wejściu, to zapewne należy próbować tę kwadraturę ścięśnić.

### 7.3. Interferometria na stanach ścięśnionych

Znajdźmy najwyższą rozdzielczość omawianego pomiaru fazy, jaką można uzyskać przy wykorzystaniu pola  $\mathcal{E}_2$  w stanie ścięśnionej próżni. Ścięśnienie drugiej kwadratury pola  $\mathcal{E}_2$  (czyli tej jego składowej, która jest w kwadraturze z polem koherentnym  $\mathcal{E}_1$ ) powoduje co prawda redukcję szumu (licznik w równaniu (7.7)), co początkowo zmniejsza  $\delta\theta_{\min}$ , a więc poprawia rozdzielczość. Jednocześnie jednak zmniejsza się wartość sygnału (mianownik w równaniu (7.7)). Istotnie, dla stanu próżni ścięśnionej w drugiej kwadraturze o czynnik  $e^{-r}$  (rozdział 6.3.3) mamy

$$\langle X_{2,1}^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r}, \quad \langle X_{2,2}^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r}, \quad \text{stąd} \quad \langle X_{2,1}^2 + X_{2,2}^2 \rangle = \frac{1}{2} \cosh 2r,$$

a ponieważ funkcja  $\cosh 2r$  rośnie (wykładniczo) z argumentem  $r$  mianownik w równaniu (7.7) dla dość dużych  $r$  maleje do zera, a więc  $\delta\theta_{\min} \rightarrow \infty$ , co jest efektem dokładnie odwrotnym do zamierzonego. Musimy więc rozwiązać zagadnienie optymalizacji współczynnika ścięśnienia.

Jak się za moment okaże, optymalne ścięśnienie odpowiada wartościom  $e^r \sim |\alpha| \gg 1$ , a więc  $e^{2r} \gg e^{-2r}$ . Uprościmy więc rachunek od razu, zanedbując wyraz  $e^{-2r}$ , czyli pisząc  $\cosh 2r \approx e^{2r}/2$ . Wprowadźmy też nową zmienną  $x = 2|\alpha|e^{-r}$ . W tej zmiennej równanie (7.7) opisujące rozdzielczość ma postać

$$\delta\theta_{\min} = \frac{1}{2|\alpha|^2} \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Minimalizacja tej wielkości względem zmiennej  $x \in (1, \infty)$  daje minimum w  $x = \sqrt{3}$ , czyli  $e^r = 2|\alpha|/\sqrt{3} \gg 1$ . Dla takiej wartości otrzymujemy najlepszą możliwą do uzyskania rozdzielczość przy ustalonej mocy wiązki  $\mathcal{E}_1$ ,

$$\delta\theta_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{4|\alpha|^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\bar{n}} \quad (\text{granica Heisenberga}).$$

Widzimy więc, że stosując stany ścięśnione zamiast próżni na drugim wejściu interferometru otrzymujemy rozdzielczość ograniczoną jedynie, z dokładnością do współczynników liczbowych, fundamentalną relacją nieoznaczoności (stąd nazwa tego wyniku).



W tym rozdziale omówiona zostanie bardzo ważna klasa stanów kwantowych pola jednorodowego: stany własne liczby fotonów (ang. *number states*), nazywane też stanami Foka (ang. *Fock states*<sup>1</sup>). Stany te są ortogonalne i tworzą układ zupełny, a więc stanowią bazę w przestrzeni Hilberta stanów pola. Choć w tym wykładzie pojawiają się one dość późno, można je uważać za bazę „standardową”: inne stany pola często charakteryzujemy poprzez podanie ich rozwinięcia na stany Foka. Jest tak dlatego, że stany te związane są bezpośrednio z bozonową algebrą operatorów kreacji i anihilacji, więc bezpośrednio odnoszą się do standardowego formalizmu układów wielu cząstek (tzw. *drugiego kwantowania*), powszechnie wykorzystywanego w wielu dziedzinach fizyki.

### 8.1. Operatory kreacji i anihilacji

W rozdziale 6.1 wskazaliśmy na formalną analogię pomiędzy polem jednorodowym a jednowymiarowym oscylatorem harmonicznym. Tu rozwiniemy tę analogię i rozszerzymy ją na operatory drabinkowe, używane przy rozwiązywaniu zagadnienia oscylatora harmonicznego metoda operatorową<sup>2</sup>.

W teorii oscylatora harmonicznego definiuje się operatory

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x + ip_x), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x - ip_x). \quad (8.1)$$

Operatory  $a$  i  $a^\dagger$  nie komutują:

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2m\hbar\omega} (-im\omega[x, p_x] + im\omega[p_x, x]).$$

Korzystając z kanonicznej relacji komutacji  $[x, p_x] = i\hbar$  dostajemy

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (8.2)$$

a więc bozonową regułą komutacji.

Odwracając relacje (8.1) znajdujemy

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad p_x = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a - a^\dagger).$$

Hamiltonian oscylatora harmonicznego wyrażony poprzez operatory  $a$  i  $a^\dagger$  ma postać

$$H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (8.3)$$

którą uzyskujemy ze standardowej postaci  $H = p_x^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2$  przez proste podstawienie, uważając na kolejność nieprzemiennych operatorów  $a$  i  $a^\dagger$  i korzystając z relacji komutacji (8.2).

<sup>1</sup> Zwróć uwagę na różnicę w transkrypcji rosyjskiego nazwiska.

<sup>2</sup> Patrz np. L. Marchildon, *Quantum Mechanics*, rozdz. 5.7 (gdzie operatory te oznaczone są wielkimi literami).

Analogiczne definicje przyjmujemy dla pola jednomodowego, kładąc jedynie formalnie  $m = 1$  oraz zastępując  $x \rightarrow q$ ,  $p_x \rightarrow p$ , jak w rozdziale 6.1. Równania (8.2) i (8.3) pozostają spełnione. Pojawia się jeszcze jedna ważna relacja, wiążąca operatory  $a$  i  $a^\dagger$  z operatorami kwadratur. Ponieważ  $X_1 = \sqrt{\omega/(2\hbar)}q$  i  $X_2 = p/\sqrt{2\hbar\omega}$ , to

$$\boxed{X_1 = \frac{a + a^\dagger}{2}, \quad X_2 = \frac{a - a^\dagger}{2i}.} \quad (8.4)$$

Można łatwo sprawdzić, że reguły komutacji (6.13) i (8.2) są równoważne.

Spodziewamy się, że energia pola jednomodowego powinna być sumą energii próżni  $\hbar\omega/2$  (rozdział 6.2) i energii fotonów, z których każdy ma energię  $\hbar\omega$ . Stan o ustalonej liczbie fotonów  $n$  ma więc ustaloną energię  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ . W zestawieniu z postacią hamiltonianu z równania (8.3), pozwala to zinterpretować operator  $a^\dagger a$  jako operator liczby fotonów. Wprowadźmy oznaczenie

$$\boxed{\hat{n} = a^\dagger a} \quad (\text{operator liczby fotonów}).$$

Aby ta interpretacja miała sens, wypada jednak formalnie wykazać, że operator ten nie ma ujemnych albo niecałkowitych wartości własnych. Przejdziemy do tego za moment.

Jak widzimy, Hamiltonian wyraża się przez operatory  $a$  i  $a^\dagger$ . Zresztą każdy operator można wyrazić przez te operatory. Musimy więc zbadać algebrę tych operatorów, która okazuje się całkowicie określona przez ich relację komutacji. Pozwoli nam to scharakteryzować operator  $\hat{n}$  i opisać jego widmo, co automatycznie oznacza znajomość widma energii<sup>3</sup>.

Zauważmy na początek, że operator  $\hat{n} = a^\dagger a$  jest hermitowski, jego stany tworzą więc bazę w przestrzeni Hilberta. Nie może on mieć ujemnych wartości własnych, bo wtedy miałby ujemną średnią w pewnym stanie (konkretnie w stanie własnym należącym do ujemnej wartości własnej). A tymczasem, dla dowolnego stanu  $|\Psi\rangle$ , albo  $a|\Psi\rangle = 0$  i wtedy oczywiście  $\langle \Psi | \hat{n} | \Psi \rangle = \langle \Psi | a^\dagger a | \Psi \rangle = 0$ , albo  $a|\Psi\rangle = |\Phi\rangle$  jest wektorem z przestrzeni Hilberta i  $\langle \Psi | \hat{n} | \Psi \rangle = \langle \Phi | \Phi \rangle > 0$ . Jeśli  $a|\Psi\rangle = 0$ , to taki stan  $|\Psi\rangle$  nazywamy próżnią i oznaczamy  $|0\rangle$ . Zakładamy tu, że stan próżni jest jedyny. Jest on oczywiście stanem własnym  $\hat{n}$  należącym do wartości własnej 0, a więc automatycznie stanem własnym hamiltonianu o energii  $E_0 = \hbar\omega/2$ . Spostrzeżenie to jest spójne z wnioskami z rozdziału 6.2; jest to w istocie ten sam stan próżni (czyli jest on szczególnym stanem koherentnym i jednocześnie stanem o określonej liczbie fotonów, równej 0).

Niech teraz  $|n\rangle$  będzie stanem własnym  $\hat{n}$  o wartości własnej  $n > 0$ . Pokażemy, że  $a|n\rangle$  też jest stanem własnym. Istotnie, jeśli  $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$ , to — korzystając z reguł komutacji (8.2) — możemy napisać

$$\hat{n}(a|n\rangle) = a^\dagger a a|n\rangle = (a a^\dagger - 1)a|n\rangle = a\hat{n}|n\rangle - a|n\rangle = (n-1)(a|n\rangle),$$

a więc  $a|n\rangle$  jest istotnie stanem własnym i należy do wartości własnej  $n-1$ . Tę procedurę można iterować, generując stany własne o coraz mniejszych wartościach własnych, różniących się o 1:  $n, n-1, n-2, \dots$  aż dojdziemy do wartości ujemnych, które — jak już wiemy — nie mogą się pojawić. Jedyna sytuacja, w której tak się nie dzieje, to pojawienie się stanu próżni w którejś iteracji:  $a|0\rangle = 0$  i dalsza iteracja nie generuje żadnych wektorów stanu, które należałyby do ujemnych wartości własnych. To oznacza, że ciąg wartości własnych  $n, n-1, n-2, \dots$  zawiera liczbę 0, a więc  $n$  musi być liczbą naturalną. Potwierdza to naszą interpretację stanu  $|n\rangle$  jako stanu o  $n$  fotonach.

Zauważmy jeszcze, że stan  $|\Phi\rangle = a|n\rangle$  nie jest poprawnie unormowany. Istotnie,

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = \langle n | a^\dagger a | n \rangle = n \langle n | n \rangle = n.$$

<sup>3</sup> Wyprowadzone tu fakty są zapewne oczywiste dla studentów zaznajomionych z podstawami formalizmu układów wielu cząstek (bozonów). Część z nich pojawiła się zapewne także w ramach kursu mechaniki kwantowej.



Wobec tego unormowanym stanem należącym do wartości własnej  $n - 1$ , czyli stanem o  $n - 1$  fotonach, jest

$$|n - 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a |n\rangle.$$

W analogiczny sposób wykazujemy, że stan  $a^\dagger |n\rangle$  należy do wartości własnej  $n + 1$ , a poprawnie unormowanym stanem o  $n$  fotonach jest

$$|n + 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n + 1}} a^\dagger |n\rangle.$$

Mamy więc reguły działania operatorów  $a$  i  $a^\dagger$ :

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n - 1\rangle, \quad a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n + 1} |n + 1\rangle. \quad (8.5)$$

Ponieważ stany  $|n\rangle$  tworzą bazę, równania (8.5) w pełni definiują działanie tych operatorów na przestrzeni Hilberta. W działaniu na stany Foka (i tylko wtedy) operatory te, odpowiednio, zmniejszają i zwiększają liczbę fotonów o 1. Stąd ich nazwy: *operator anihilacji* ( $a$ ) i *operator kreacji* ( $a^\dagger$ ) fotonów. W przypadku pól wielomodowych dla każdego modu pola istnieje taka para operatorów.

Zauważmy, że drugie z równań (8.5) pozwala nam zapisać stan Foka  $|n\rangle$  jako efekt  $n$ -krotnego działania operatorem kreacji na stan próżni,

$$|1\rangle = a^\dagger |0\rangle, \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} (a^\dagger)^2 |0\rangle, \quad |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} a^\dagger |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} (a^\dagger)^3 |0\rangle, \dots, |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle. \quad (8.6)$$

Scharakteryzujemy pole elektryczne światła w stanie Foka. Po pierwsze, posługując się równaniem (6.15) i równaniami (8.4), możemy zapisać operator pola w postaci

$$\mathcal{E}_x(z, t) = \sin kz \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} (a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}). \quad (8.7)$$

Zauważmy, korzystając z równań (8.5), że

$$\langle n | a | n \rangle = \langle n | \sqrt{n} | n - 1 \rangle = 0,$$

bo stany Foka są ortogonalne. Podobnie  $\langle n | a^\dagger | n \rangle = 0$ . Z tych własności oraz z równania (8.7) wynika natychmiast, że

$$\langle n | \mathcal{E}_x(\mathbf{r}, t) | n \rangle = 0.$$

Średnia wartość pola jest zerowa, jednak pole nie może zniknąć tożsamościowo, bo przecież energia jest niezerowa. W istocie, średni kwadrat pola ma wartość

$$\langle \mathcal{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \sin^2 kz \frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \left\langle a^2 e^{-2i\omega t} + a^\dagger a + a a^\dagger + (a^\dagger)^2 e^{2i\omega t} \right\rangle.$$

Ponieważ  $\langle n | a^2 | n \rangle = \langle n | (a^\dagger)^2 | n \rangle = 0$  na mocy reguł z równania (8.5), natomiast  $\langle n | a^\dagger a | n \rangle = \langle n | \hat{n} | n \rangle = n$  i  $\langle n | a a^\dagger | n \rangle = \langle n | a^\dagger a + 1 | n \rangle = n + 1$ , więc

$$\langle \mathcal{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \sin^2 kz \frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

a więc faktycznie średni kwadrat pola jest proporcjonalny do gęstości energii. W klasycznej optyce pole, które ma nieznikającą amplitudę (i energię), lecz średnia wartość jego natężenia w dowolnej chwili czasu wynosi 0, to pole *chaotyczne*, czyli pole o losowej fazie. Faktycznie, jeśli faza  $\phi$  jest „całkowicie losowa”, czyli ma jednorodny rozkład na przedziale  $[0, 2\pi)$ , to średnie natężenie klasycznego pola  $\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi) = 0$ . Tak samo interpretujemy stan Foka – jako stan o niezerowej amplitudzie pola, (w sensie średniokwadratowym), ale o nieokreślonej fazie.

## 8.2. Stany koherentne raz jeszcze

Zacznijmy od podania nieco bardziej formalnej (i standardowej) definicji stanu koherentnego. Jest to mianowicie stan własny operatora anihilacji

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (\text{stan koherentny}), \quad (8.8)$$

gdzie  $\alpha$  jest liczbą zespoloną (operator anihilacji nie jest oczywiście hermitowski, więc jego wartości własne są w ogólności zespolone). Sprawdźmy najpierw, że taki stan faktycznie minimalizuje zasadę nieoznaczoności dla kwadratur i że obie te nieoznaczoności są równe, a więc mamy do czynienia z tymi samymi stanami, co w rozdziale 6 (obecna definicja jest ściśle równoważna poprzedniej, ale dowód „w drugą stronę” jest trudniejszy).

Rachunki na stanach koherentnych prowadzi się w dość schematyczny sposób, korzystając z równania definicyjnego (8.8) oraz równania do niego sprzężonego,

$$\langle\alpha|a^\dagger = (a|\alpha\rangle)^\dagger = \langle\alpha|a^* = \alpha^*\langle\alpha|.$$

To oznacza, że potrafimy łatwo wyliczać elementy macierzowe *normalnie uporządkowanych* iloczynów operatorów kreacji i anihilacji, tzn. takich w których operatory kreacji stoją na lewo od operatorów anihilacji. Wtedy operatory anihilacji „działają w prawo” zgodnie z równaniem (8.8), generując potęgi liczby  $\alpha$ , a operatory kreacji „działają w lewo”, zgodnie z równaniem sprzężonym, generując potęgi liczby  $\alpha^*$ .

Stosując powyższą praktyczną regułę oraz równanie (8.4) znajdujemy dla stanu koherentnego

$$\langle\alpha|X_1|\alpha\rangle = \langle\alpha|\frac{a+a^\dagger}{2}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\frac{\alpha+\alpha^*}{2}|\alpha\rangle = \frac{\alpha+\alpha^*}{2}\langle\alpha|\alpha\rangle = \text{Re } \alpha.$$

Tu nie ma problemów z uporządkowaniem, bo nie ma żadnych iloczynów. W przypadku operatora  $X_1^2$  konieczne jest przestawienie operatorów przy użyciu relacji komutacji (8.2),

$$X_1^2 = \frac{1}{4} \left[ a^2 + (a^\dagger)^2 + aa^\dagger + a^\dagger a \right] = \frac{1}{4} \left[ a^2 + (a^\dagger)^2 + 2a^\dagger a + 1 \right].$$

Teraz mamy już postać normalnie uporządkowaną i ostatni krok wykonujemy w zasadzie mechanicznie, zastępując  $a \rightarrow \alpha$  i  $a^\dagger \rightarrow \alpha^*$ :

$$\langle\alpha|X_1^2|\alpha\rangle = \frac{1}{4} \left\langle \alpha \left| a^2 + (a^\dagger)^2 + 2a^\dagger a + 1 \right| \alpha \right\rangle = \frac{1}{4} \left[ \alpha^2 + (\alpha^*)^2 + 2\alpha^* \alpha + 1 \right] = (\text{Re } \alpha)^2 + 1/4.$$

Stąd znajdujemy wariancję (kwadrat nieoznaczoności)

$$(\Delta X_1)^2 = \langle X_1^2 \rangle - \langle X_1 \rangle^2 = \frac{1}{4}.$$

W identyczny sposób wyliczamy

$$(\Delta X_2)^2 = \langle X_2^2 \rangle - \langle X_2 \rangle^2 = \frac{1}{4}.$$

A więc istotnie stany koherentne według nowej definicji spełniają definicję z rozdziału 6.

Nowa, precyzyjna definicja pozwala nam też powiązać stany koherentne zdefiniowane jako minimalizujące nieoznaczoność kwadratur (rozdział 6 i obecny) z pojęciem światła koherentnego z rozdziału 4, czyli światła o Poissonowskiej statystyce fotonów. Przedstawmy stan koherentny w bazie stanów Foka,

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \quad \text{gdzie } c_n = \langle n|\alpha\rangle.$$

Korzystając z równań (8.6) oraz (8.8) mamy

$$c_n = \langle n|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0|a^n|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}.$$

Moduł współczynnika  $\langle 0|\alpha\rangle$  wyznaczamy z warunku unormowania,

$$1 = \langle \alpha|\alpha\rangle = \sum_n |c_n|^2 = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_n \left| \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \right|^2 = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2},$$

gdzie w ostatnim kroku rozpoznaliśmy rozwinięcie Taylora funkcji wykładniczej. Z tego wynika, że  $|\langle 0|\alpha\rangle| = e^{-|\alpha|^2/2}$ . Dowolną fazę stanu koherentnego ustala się na mocy powszechnie stosowanej konwencji, zgodnie z którą  $c_n \in \mathbb{R}_+$ . Mamy więc

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (8.9)$$

Zauważmy, że zgodnie z tym rozkładem, prawdopodobieństwo wystąpienia w stanie koherentnym  $n$  fotonów równe jest

$$p_n = |c_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}.$$

Jest to istotnie rozkład Poissona o średniej  $|\alpha|^2$ .

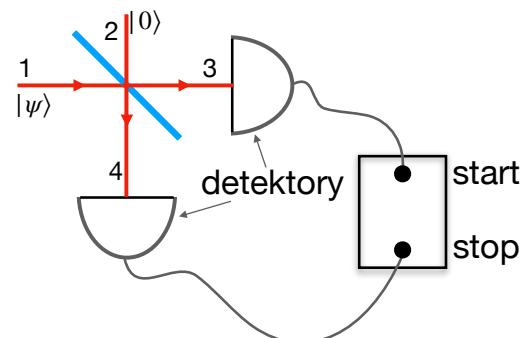
### 8.3. Kwantowa teoria eksperymentu HB&T i eksperyment HOM

Dzielnik wiązki, stanowiący centralną część interferometru Hanbury'ego Browna i Twissa, ma dwa porty wejściowe i dwa wyjściowe (rysunek 8.1). Minimalny opis przejścia wiązki przez dzielnik wymaga więc wprowadzenia czterech par operatorów  $a_i, a_i^\dagger$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , z których każda para odnosi się do odpowiedniego modu wejściowego ( $i = 1, 2$ ) lub wyjściowego ( $i = 3, 4$ ). O ile jednak mody 1 i 2 są niezależne (podobnie mody 3,4), o tyle każdy z modów wyjściowych jest superpozycją modów wejściowych i na odwrót. Jest bowiem oczywiste, że zadanie określonych pól na wejściach dzielnika wiązki jednoznacznie determinuje, jakie pola pojawią się na wyjściach. Jak pamiętamy z rozdziału 2.2.2, przy odpowiednim wyborze faz relacja pomiędzy polami w modach wychodzących i wchodzących dzielnika wiązki ma postać

$$\mathcal{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2), \quad \mathcal{E}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2).$$

Zgodnie z równaniem (8.7), operator pola (składowej o częstości dodatniej) jest liniową funkcją operatora anihilacji, a więc taka sama relacja musi zachodzić dla tych operatorów,

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 - a_2), \quad a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 + a_2). \quad (8.10)$$



Rys. 8.1. Interferometr Hanbury'ego-Browna i Twissa.

Niezależność modów 1 i 2 oznacza, że operatory odnoszące się do tych modów komutują:  $[a_1, a_2^\dagger] = 0$  (podobnie dla modów 3 i 4, co można łatwo sprawdzić podstawiając wyrażenia z powyższych relacji).

Rozważmy teraz eksperyment HB&T, w którym na wejście 1 interferometru pada wiązka światła w stanie  $|\psi\rangle$ , którego własności chcemy zbadać, a mod wejściowy 2 jest w stanie próżni, jak na rysunku 8.1. Ograniczymy naszą dyskusję do funkcji korelacji przy zerowym opóźnieniu, czyli do unormowanej średniej wartości liczby koincydencji. Koincydencja oznacza, że na wyjściach 3 i 4 w pewnym bardzo krótkim przedziale czasu liczba fotonów jednocześnie równa jest 1. Odpowiednią obserwabłą jest  $\hat{n}_3 \hat{n}_4$ ; przyjmuje ona wartość 1 jedynie wtedy, gdy liczba fotonów na obu wyjściach równa jest 1. Unormowana funkcja korelacji ma postać

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{n}_3 \hat{n}_4 \rangle}{\langle \hat{n}_3 \rangle \langle \hat{n}_4 \rangle}.$$

Średnia wartość iloczynu liczb fotonów wynosi

$$\langle \hat{n}_3 \hat{n}_4 \rangle = \langle a_3^\dagger a_3 a_4^\dagger a_4 \rangle = \langle a_3^\dagger a_4^\dagger a_4 a_3 \rangle,$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że operatory odnoszące się do niezależnych modów 3 i 4 komutują. Korzystamy teraz z relacji (8.10) oraz z faktu, że stanem pól wejściowych jest  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 |0\rangle_2$ , a więc  $a_2 |\Psi\rangle = 0$ . Dostajemy

$$a_4 a_3 |\Psi\rangle = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) (a_1 - a_2) = \frac{1}{2} a_1 a_1 |\psi\rangle_1 |0\rangle_2.$$

Poprzez sprzężenie hermitowskie otrzymujemy stąd również

$$\langle \Psi | a_3^\dagger a_4^\dagger = \frac{1}{2} \langle 0 |_2 \langle \psi |_1 a_1^\dagger a_1^\dagger.$$

Średnia wynosi więc

$$\langle \hat{n}_3 \hat{n}_4 \rangle = \frac{1}{4} \langle a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 \rangle$$

Zwróćmy uwagę, że uporządkowanie operatorów jest tu różne niż w iloczynie  $\hat{n}_1 \hat{n}_1$ , który otrzymalibyśmy zastępując liczby fotonów operatorami wprost w równaniu (5.12). Wykorzystując relację komutacji możemy to zapisać w postaci

$$\langle \hat{n}_3 \hat{n}_4 \rangle = \frac{1}{4} \langle a_1^\dagger (a_1 a_1^\dagger - 1) a_1 \rangle = \frac{1}{4} (\langle \hat{n}_1^2 \rangle - \langle \hat{n}_1 \rangle).$$

Średnie liczby fotonów niezbędne do unormowania funkcji korelacji obliczamy w ten sam sposób, otrzymując

$$\langle \hat{n}_3 \rangle = \langle \hat{n}_4 \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{n}_1 \rangle.$$

Stąd mamy

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{n}_1^2 \rangle - \langle \hat{n}_1 \rangle}{\langle \hat{n}_1 \rangle^2}.$$

Fakt, że funkcja autokorelacji odnosi się do wiązki na wejściu 1 i zależy tylko od jej charakterystyk, jest oczywisty, więc możemy pominąć indeks 1. Ponadto warto wyrazić średnią z kwadratu przez wariancję i zapisać wynik w standardowej postaci

$$g^{(2)}(0) = \frac{(\Delta n)^2 + \bar{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}^2} = 1 + \frac{(\Delta n)^2 - \bar{n}}{\bar{n}^2}.$$

wielkość  $Q = [(\Delta n)^2 - \bar{n}]/\bar{n}^2$  nazywa się *parametrem Mandela*. Widzimy, że w rozważnym tu przypadku pola jednomodowego rozgrupowanie fotonów jest powiązane ze statystyką fotonów: Dla wiązek o statystyce pod-Poissonowskiej  $g^{(2)}(0) < 1$ .

Łatwo można teraz zbadać dwa ważne przykłady. Dla stanu Foka  $|n\rangle$ ,  $n > 1$ , mamy  $(\Delta n)^2 = 0$  i fotony są zawsze rozgrupowane,

$$g^{(2)}(0) = 1 - \frac{1}{n} \quad (\text{stan Foka}).$$

Szczególnym przypadkiem jest stan jednofotonowy, dla którego  $g^{(2)}(0) = 0$ . Natomiast dla stanu koherentnego  $(\Delta n)^2 = \bar{n}$ , stąd  $g^{(2)}(0) = 1$ .

Innym ważnym eksperymentem wykorzystującym interferometr HB&T jest doświadczenie Honga–Ou–Mandela. Mamy tu do czynienia z *dwoma* identycznymi (tzn. o tej samej częstotliwości i polaryzacji) fotonami, padającymi jednocześnie, po jednym na każdy z portów wejściowych interferometru. Jeśli  $|0\rangle$  jest stanem, w którym na każdym z portów wejściowych (a więc i wyjściowych) jest próżnia, to stan pola w tym eksperymencie ma postać  $|\Psi\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle$ . Wykonujemy teraz proste algebraiczne przeliczenie, wyrażając ten stan poprzez mody wyjściowe (stosując relacje odwrotne do równań (8.10)). Łatwo sprawdzić, że ma on postać

$$|\Psi\rangle = \frac{a_4^\dagger + a_3^\dagger}{\sqrt{2}} \frac{a_4^\dagger - a_3^\dagger}{\sqrt{2}} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (a_4^\dagger)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} (a_3^\dagger)^2 \right] |0\rangle.$$

W języku pól wyjściowych stan pola jest więc superpozycją stanu dwufotonowego na pierwszym porcie wyjściowym i stanu dwufotonowego na drugim porcie wyjściowym. Nie zawiera składowej, w której po jednym fotonie pada na każdy detektor, a więc nigdy nie nastąpi koincydencja — oba fotony zawsze opuszczą interferometr tym samym wyjściem. Efekt ten jest przejawem interferencji dwóch fotonów. W praktyce służy do demonstrowania identyczności dwóch fotonów pochodzących z różnych źródeł bądź z różnych przejść w jednym układzie (np. kaskada biekscyton–ekscyton w kropce kwantowej).







## Spis wykorzystanej literatury





## Spis rysunków

1.1	Obliczone widmo promieniowania równowagowego dla kilku temperatur oraz widmo przewidywane przez klasyczny model Rayleigha–Jeansa. Źródło: <a href="#">Wikimedia Commons</a> /Domena publiczna	3
1.2	Obliczone widmo promieniowania równowagowego dla temperatury 5778 K oraz obserwowane widmo promieniowania słonecznego ponad atmosferą i na powierzchni Ziemi. Źródło: adaptacja pracy Nick84/ <a href="#">Wikimedia Commons/CC-BY-SA-3.0</a> .	4
1.3	Uproszczony schemat układu do pomiaru efektu fotoelektrycznego. E – emiter; K – kolektor; pomarańczowe strzałki symbolizują padające promieniowanie, a niebieska strzałka - ruch elektronu.	5
1.4	Schematyczna prezentacja wyników pomiaru efektu fotoelektrycznego: Zależność fotoprądu od napięcia zewnętrznego przy zmianie natężenia (a) i częstości (b) światła.	5
1.5	Układ do badania efektu Comptona. Źródło: Katalyst Foundation/ <a href="#">Fizyka dla szkół wyższych, t.3/CC-BY-SA-3.0</a> .	6
1.6	Typowe wyniki pomiaru efektu Comptona. Źródło: Katalyst Foundation/ <a href="#">Fizyka dla szkół wyższych, t.3/CC-BY-SA-3.0</a> .	6
1.7	Detekcja światła przy użyciu fotodiody lawinowej w trybie liniowym (a) i w trybie Geigera (b). Wykresy po prawej stronie ilustrują schematycznie przebieg czasowy prądu detektora.	7
1.8	Przejście kwantowe w detektorze inicjujące zdarzenie detekcyjne. $ i\rangle$ i $ f\rangle$ oznaczają, odpowiednio, stan początkowy i końcowy detektora.	7
2.1	Reprezentacja koherentnego pola jednomodowego na diagramie fazowym.	16
2.2	Interferencja fal: konstruktywna (po lewej) i destruktywna (po prawej). Gruba linia na górze reprezentuje sumę dwóch fal przedstawionych poniżej.	16
2.3	Interferometr Michelsona, BS – dzielnik wiązki 50/50, M – lustro, D – detektor.	17
2.4	Interferometr Macha–Zehndera, BS – dzielnik wiązki 50/50, M – lustro, D – detektory.	17
2.5	Oznaczenie portów wejściowych (niebieskie) i wyjściowych (zielone) dzielnika wiązki.	18
2.6	Propagacja pól w interferometrze Michelsona. Na niebiesko oznaczone są wejścia i wyjścia dzielnika wiązki (dla obu kierunków propagacji) wg przyjętej tu konwencji.	19
2.7	Schematyczna reprezentacja prążków interferencyjnych otrzymanych w interferometrze Michelsona. Wykres przedstawia sygnał detektora w zależności od różnicy dróg optycznych w ramionach interferometru. Szara linia – przypadek idealny, światło doskonale koherentne; czerwona linia – przypadek rzeczywisty.	20
3.1	Dwa poziomy atomowe, pomiędzy którymi następują przejścia optyczne.	23
3.2	Graficzna reprezentacja emisji spontanicznej (a), absorpcji (b) i emisji wymuszonej (c).	24
3.3	Schematyczne wykresy linii widmowej przejścia atomowego $f(\omega)$ i widmowej gęstości energii pola $u(\omega)$ w przypadku szerokiej gęstości widmowej.	24
3.4	Schematyczna reprezentacja lasera. M – lustro, $L$ – długość rezonatora.	27
3.5	Schematyczne wykresy linii widmowej przejścia atomowego $f(\omega)$ i widmowej gęstości energii pola $u(\omega)$ w przypadku wąskiej gęstości widmowej. Tu obwiednia linii widmowej $f(\omega)$ odpowiada poszerzeniu niejednorodnemu i jest proporcjonalna do liczby atomów o danej częstości przejścia atomowego.	28
3.6	Ilustracja do równania ciągłości dla strumienia mocy wiązki.	28
3.7	Schematyczna reprezentacja przejść laserowych (czerwone strzałki) w ośrodku aktywnym o strukturze trypoziomowej (a) i czteropoziomowej (b).	29
3.8	Struktura poziomów, mechanizm pobudzania oraz przejścia kwantowe w laserze He-Ne. Wybrane przejścia laserowe oznaczono czerwonymi strzałkami. Źródło: XuPanda/ <a href="#">Wikimedia Commons/CC-BY-SA-4.0</a> .	30

3.9	Zależność mocy lasera (a) oraz współczynnika wzmocnienia (b) od mocy pobudzenia. Niebieskie linie: schematyczna zależność zgodna z analizą przypadków granicznych. Czerwone linie: rozwiązanie równań kinetycznych dla lasera czteropoziomowego. Przyjęto $\beta = 0.05$ . . . . .	30
3.10	Rozkład gęstości energii w płaszczyźnie poprzecznej dla wiązek Gaussa-Hermite'a o podanych nad wykresami liczbach $(m, n)$ . Zielone koło reprezentuje aperturę o średnicy $\pi w$ . . . . .	33
3.11	Mody rezonatora w ośrodku z dyspersją. Czerwona linia reprezentuje przykładową zależność częstości od liczby falowej (krzywą dyspersji) dla ośrodka aktywnego. Szarym prostokątem zaznaczono przedział częstości, w którym aktywny jest ośrodek. Szara prosta jest styczną do krzywej dyspersji w tym obszarze. . . . .	33
3.12	Schematyczna reprezentacja obwiedni funkcji wzmocnienia (zielona linia), strat rezonatora (przerwana linia) i częstości modów rezonatora (szare słupki). Ciemnoszare słupki reprezentują mody, dla których wzmocnienie przewyższa straty, więc będzie zachodzić akcja laserowa. . . . .	34
3.13	Schematyczna reprezentacja amplitud kolejnych modów rezonatora (szare słupki) i ich obwiedni (zielona linia). . . . .	34
3.14	Impulsy lasera pracującego w trybie synchronizacji modów z przesunięciem obwiednia-nośna. Zwróć uwagę na przesunięcie oscylacji pola względem obwiedni kolejnych impulsów. . . . .	35
3.15	Uproszczona ilustracja zaniku koherencji. W przypadku fluktuacji fazy zielone strzałki reprezentują fazę pola (ściślej, wartość $e^{i\phi}$ ) w różnych powtórzeniach. W przypadku niejednorodnego układu emiterów przedstawiają one w analogiczny sposób fazy różnych emiterów. Reprezentacja jest schematyczna i uwzględnia pięć powtórzeń lub pięć emiterów (w rzeczywistości liczba ta jest oczywiście znacznie większa). Czerwone strzałki reprezentują wartość średnią tych czynników fazowych, proporcjonalną do funkcji korelacji $g^{(1)}(\tau)$ . (a) Chwila początkowa $\tau = 0$ . (b,c) Późniejsze chwile czasu. (d) Po czasie znacznie dłuższym od czasu korelacji, $\tau \gg \tau_c$ . . . . .	37
3.16	Światło jako ciąg paczek falowych o czasie trwania $\tau_c$ . . . . .	39
4.1	Schemat myślowego eksperymentu: zliczanie fotonów przy użyciu idealnego detektora. . . . .	41
4.2	Rozkłady Poissona (słupki), Plancka (zielone linie) oraz Gaussa (niebieska linia) dla średnich wartości liczby fotonów wskazanych na rysunkach. W rozkładzie Gaussa przyjęto wariancję $\sigma^2 = (\Delta n)^2$ , czyli taką, jaką ma rozkład Poissona o tej wartości średniej. . . . .	42
4.3	(a) Wiązka pod-Poissonowska. (b) Sygnał z idealnego detektora. (c) Rozkład prawdopodobieństwa dla liczby fotonów w przedziale zaznaczonym na rysunku (a). . . . .	43
4.4	Schemat pomiaru szumu śrutowego fotodiody. Na podstawie rysunku z książki M. Fox, <i>Quantum Optics. An Introduction</i> . . . . .	45
4.5	Schemat elektryczny układu do pomiaru widma mocy szumu śrutowego fotodiody. PD – fotodioda, $R_L$ – opór roboczy, $C$ – kondensator, $A$ – wzmacniacz. Źródło: M. Fox, <i>Quantum Optics. An Introduction</i> . . . . .	46
4.6	Typowy wynik pomiaru widma mocy szumu detektora. . . . .	49
4.7	Redukcja szumu klasycznego $1/f$ : aktywna (a) i pasywna w układzie detekcji zrównoważonej (b). Źródło: M. Fox, <i>Quantum Optics. An Introduction</i> . . . . .	50
4.8	Wynik pomiaru widma mocy szumu detektora dla światła generowanego przez diodę świecącą. Na wykresie porównano poziom szumu dla baterii zasilającej diodę przez rezystor (szum Johnsona) z wynikiem w przypadku zasilania źródłem o Poissonowskiej statystyce prądu. Dolna linia przedstawia poziom szumu samego układu detekcji (bez źródła światła). Źródło: F. Wöfl <i>et al.</i> , <i>J. Mod. Opt.</i> <b>45</b> , 1147 (1998). . . . .	50
4.9	Układ do generacji i detekcji wiązki światła o statystyce pod-Poissonowskiej, wykorzystujący rurę próżniową Francka–Hertza [M. Teich, B. Saleh, <i>J. Opt. Soc. Am. B</i> <b>2</b> , 275 (1985)]. Źródło grafiki: M. Fox, <i>Quantum Optics. An Introduction</i> . . . . .	50

4.10	Wyniki pomiaru statystyki fotonów eksperymentem Teicha i Saleha. Na wykresie pokazano stosunek wariancji do średniej liczby fotonów dla światła emitowanego wyłącznie przez rozgrzane katodę (puste koło), przez laser (pełne koła połączone ciągłą linią) oraz przez atomy rtęci pobudzone prądem katodowym (trójkąty połączone linią przerywaną). Źródło: M. Teich, B. Saleh, <i>J. Opt. Soc. Am. B</i> <b>2</b> , 275 (1985). . . . .	51
4.11	Uproszczony układ do generacji i detekcji wiązki światła o statystyce pod-Poissonowskiej, wykorzystujący emisję z wiązki atomów sodu [R. Short, L. Mandel, <i>Phys. Rev. Lett.</i> <b>51</b> , 384 (1983)]. . . . .	51
5.1	Uproszczony schemat interferometru gwiazdowego Michelsona. . . . .	54
5.2	Uproszczony schemat interferometru gwiazdowego Hanbury'ego-Browna i Twissa. . . . .	55
5.3	Współczesny interferometr Hanbury'ego-Browna i Twissa. BS – dzielnik wiązki 50/50. . . . .	57
5.4	Przykładowe przebiegi funkcji $g^{(2)}(\tau)$ (dla pola stacjonarnego) dozwolone (zielone) i niedozwolone (czerwone) w teorii klasycznej. W przypadku (a) $g(\tau) > g(0)$ ; w przypadku (b) również $g(\tau) > g(0)$ , a ponadto $g(0) < 1$ . . . . .	58
5.5	Przykładowe przebiegi funkcji $g^{(2)}(\tau)$ (dla pola stacjonarnego) dla światła o fotonach zgrupowanych (zielone) i rozgrupowanych (czerwone) oraz dla światła koherentnego. . . . .	61
5.6	Uproszczony schemat układu do generacji i detekcji wiązki światła o rozgrupowanych fotonach, wykorzystujący emisję z wiązki atomów sodu [H. J. Kimble, M. Dagenais, L. Mandel, <i>Phys. Rev. Lett.</i> <b>39</b> , 691 (1977)]. . . . .	62
5.7	Wyniki pomiaru funkcji autokorelacji drugiego rzędu w układzie z rysunku 5.6 (punkty). Linia reprezentuje model teoretyczny, którego nie będziemy tu omawiać. Adaptacja wykresu z pracy H. J. Kimble, M. Dagenais, L. Mandel, <i>Phys. Rev. Lett.</i> <b>39</b> , 691 (1977)]. . . . .	63
5.8	Reguły wyboru i przejścia optyczne w kropkach przy normalnym padaniu światła. e – stany elektronowe; hh – stany dziur ciężkich; lh – stany dziur lekkich. . . . .	64
5.9	Kropka kwantowa jako źródło pojedynczych fotonów. Rysunek przedstawia dynamikę relaksacji i rekombinacji par elektron–dziura o spinach odpowiadających jednemu z przejść, wybranemu przez selekcję polaryzacji w układzie detekcji. Równolegle ma miejsce identyczna dynamika nośników o przeciwnych spinach. . . . .	65
5.10	(a) Trawiony rezonator z (niewidocznymi na rysunku) kropkami kwantowymi wewnątrz. (b) Mod galerii szeptów wzbudzony na kubku wody w wibrującym samolocie. (c) Widmo kropki kwantowej: 1X – ekscyton; 2X – bieksyton; M – mod własny rezonatora. Źródła (a,c): Michler <i>et al.</i> , <i>Science</i> <b>290</b> , 2282 (2000) (adaptacja). . . . .	66
5.11	Wyniki pomiarów funkcji autokorelacji drugiego rzędu: (a) światło emitowane przez pojedynczą kropkę kwantową pobudzaną w sposób ciągły; (b) światło lasera impulsowego; (c) światło emitowane przez pojedynczą kropkę kwantową pobudzaną laserem impulsowym. $G^{(2)}(\tau)$ jest nieunormowaną funkcją autokorelacji. Źródło: Michler <i>et al.</i> , <i>Science</i> <b>290</b> , 2282 (2000) (adaptacja). . . . .	66
5.12	Wyniki pomiarów funkcji autokorelacji drugiego rzędu dla przejścia ekscytonowego (niebieski wykres) i bieksytonowego (czerwony wykres) oraz diagram stanów ekscytonowych i bieksytonowych ilustrujący metodę pobudzania i rejestrowane w eksperymencie przejścia optyczne. Źródło wykresów: D. Huber <i>et al.</i> <i>Nature Comm.</i> <b>8</b> , 15506 (2017) (adaptacja). . . . .	68
6.1	Konstrukcja do minimalizacji energii próżni przy zachowaniu zasady nieoznaczoności dla kwadratur. . . . .	72
6.2	Reprezentacja stanu próżni oraz stanu koherentnego na diagramie fazowym. . . . .	73
6.3	Amplituda i faza stanu koherentnego na diagramie fazowym. . . . .	73
6.4	Nieoznaczoności liczby fotonów i fazy w stanie koherentnym. Nieoznaczoność liczby fotonów równa jest $n_+ - n_- =  \alpha $ . . . . .	74
6.5	Stany ścieśnione: (A) stan ścieśniony w drugiej kwadraturze; (B) ścieśniony (w pierwszej kwadraturze) stan koherentny; (C) ścieśniona próżnia. . . . .	75
6.6	Stan ścieśniony w „obróconej” kwadraturze. . . . .	75
6.7	Zrównoważona detekcja homodynowa: zarys układu pomiarowego i schemat elektroniczny. Źródło grafiki: M. Fox, <i>Quantum Optics</i> . . . . .	76

6.8	Wynik pomiaru szumu dla stanu koherentnego w układzie zrównoważonej detekcji homodynowej. "SNL" jest wynikiem pomiaru dla stanu próżni, który definiuje poziom szumu śrutowego. Linia przerywana wskazuje wartość w sytuacji braku koherencji pomiędzy wiązką LO a sygnałową. Źródło: M. Fox et al., Phys. Rev. Lett. <b>74</b> , 1728 (1995). ©1995, American Physical Society. . . . .	77
6.9	Ewolucja stanu próżni (szary) i stanu koherentnego (niebieski) w zależności od drogi propagacji w kryształach nieliniowych w procesie optycznego wzmocnienia parametrycznego. . . . .	79
6.10	Układ do wytwarzania i detekcji światła ścięśnionego w parametrycznym procesie nieliniowym drugiego rzędu. Czerwone i niebieskie linie wskazują bieg wiązek o częstotliwości, odpowiednio, $\omega$ i $2\omega$ . Ze schematu usunięto elementy nieistotne dla naszej dyskusji. Adaptacja rysunku z artykułu L. A. Wu et al., Phys. Rev. Lett. <b>57</b> , 2520 (1986). . . . .	80
6.11	Wynik pomiaru mocy szumu w zależności od wyboru kwadratury (fazy lokalnego oscylatora) w układzie z poprzedniego rysunku. Linia przerywana oznacza poziom szumu śrutowego (próżnia na wejściu sygnałowym). Źródło: L. A. Wu et al., Phys. Rev. Lett. <b>57</b> , 2520 (1986). ©American Physical Society. . . . .	81
6.12	Stan ścięśniony fazowo (A) i amplitudowo (B). . . . .	82
7.1	Układ do interferometrycznego pomiaru przesunięcia fazowego wykorzystujący interferometr Macha-Zendera i schemat pomiaru zrównoważonego. Mierzone przesunięcie fazy ma miejsce w górnym ramieniu interferometru. Na rysunku zdefiniowano numerację wejść i wyjść interferometru. . . . .	83
7.2	Propagacja pola z portu wejściowego 1 w interferometrze Macha-Zendera. . . . .	84
7.3	Rozdzielczość pomiaru przesunięcia fazowego. Szara linia przedstawia szum. Czarna na przerywana linia wskazuje wartość średnią szumu. Czerwona linia to sygnał urządzenia pomiarowego ( $I_-$ ) w zależności od mierzonej wielkości ( $\delta\theta$ ). Zaznaczono najmniejszą mierzalną wartość, czyli rozdzielczość pomiaru, $\delta\theta_{\min}$ . . . . .	85
7.4	Propagacja pola z portu wejściowego 2 w interferometrze Macha-Zendera. . . . .	85
8.1	Interferometr Hanbury'ego-Browna i Twissa. . . . .	93





## Spis tabel

- 4.1 Wyniki pomiarów w eksperymencie Shorta i Mandela. W kolejnych wierszach zawarto: liczbę powtórzeń, statystykę zliczeń (liczbę powtórzeń, w których zliczono 0,1,2,3 fotony), a także średnią wartość i wariancję liczby zliczeń oraz wartość parametru  $Q$  Mandela. Podano wyniki zmierzone, jak też po korekcie uwzględniającej niedoskonałości układu pomiarowego (m.in ciemne zliczenia). . . . . 52